

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 4-bis

Serie nona

25 Luglio 1950

IN MEMORIA DI
ANTONINO LO SURDO



Lo Surdo

Il 7 Giugno del 1949 si spegneva a Roma, dopo breve malattia, il professore ANTONINO LO SURDO, titolare di Fisica superiore all'Università

di Roma, Direttore dell'Istituto fisico di quell'Università, e fondatore e Direttore dell'Istituto Nazionale di Geofisica.

Nato nel 1880 a Siracusa egli aveva speso tutta la sua vita e dedicata la sua attività alla ricerca scientifica e alla scuola. Dapprima si occupò di Fisica terrestre, poi particolarmente di Spettroscopia; infine, negli ultimi anni, tornò alla Fisica terrestre, e fattosi valoroso e fattivo assertore di questi studi in Italia, fondò a Roma l'Istituto Nazionale di Geofisica collegandolo con altri istituti posti in varie città italiane ed ugualmente impegnati in ricerche di Fisica terrestre.

Vissuta la sua giovinezza nel periodo aureo della ricerca spettroscopica, il Lo SURDO ha legato il suo nome ad una manifestazione spettroscopica di carattere fondamentale, cioè all'azione che un campo elettrico esterno ha sull'emissione spettroscopica. Particolarmente da ricordare sono l'estrema semplicità del metodo, da lui usato, per porre in evidenza questa azione utilizzando la caduta di potenziale che nei tubi di scarica ha luogo in vicinanza al catodo, e lo studio, da lui compiuto, della dipendenza dell'effetto in questione dal numero d'ordine delle righe spettroscopiche considerate.

Appassionato cultore dell'Ottica in generale e in particolare di quella fisica, seppe, usando in eleganti disposizioni sperimentali le micronde, ripetere molte delle esperienze fondamentali dell'Ottica fisica.

Il Lo SURDO indagò anche alcune interessanti particolarità della corrente di saturazione dei triodi.

L'attività che nel campo della Geofisica svolse nel primo e nell'ultimo periodo della sua vita è varia e complessa. Molto notevole il contributo nei campi dell'Ottica atmosferica, dell'Elettricità atmosferica e della Sismologia, dove ha attuato nuovi e ben precisi metodi di misura.

Infine in un gruppo di lavori più recenti il Lo SURDO ha trattato vari problemi di Acustica fisiologica chiarendone vari punti importanti che prima non sempre avevano avuto corrette e complete interpretazioni.

Il Lo SURDO si dedicò sempre con grande impegno all'insegnamento, e le sue lezioni, ricche di molti ed originali esperimenti risultavano particolarmente efficaci.

Di carattere mite e modesto egli riscosse lungo tutta la sua vita la stima e l'affetto dei colleghi e dei discepoli.

A Lui, che avemmo maestro e collega, il nostro memore e grato ricordo e l'espressione del nostro rimpianto.

La Società Italiana di Fisica.

An experiment on the anomalous scattering of fast μ -mesons by nucleons.

E. AMALDI and G. FIDECARO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 12 Maggio 1950)

Summary. — Large angle scattering of fast μ -meson by an iron plate 6 cm thick has been investigated by means of a counter-hodoscope which allows to distinguish two energy bands: from 200 MeV to 320 MeV kinetic energy and from 320 MeV to infinity. About half a million of impinging mesons have been counted. An upper limit of the cross section for anomalous scattering is obtained: about $4,5 \cdot 10^{-29}$ cm²/nucleon in the low energy band; about $2,3 \cdot 10^{-30}$ cm²/nucleon in the high energy band.

1. — Introduction.

We gave recently a short account of some experiments on the large angle scattering of high energy μ -mesons by iron nuclei ⁽¹⁾.

In the present paper we will give some more details on the experimental device used in that work and, at the same time, a more complete account of the results already published as well of some new ones.

In our previous paper we pointed out that the research of an anomalous scattering of μ -mesons by nucleons could appear unnecessary after the well known interpretation of the CONVERSI, PANCINI and PICCIONI effect ⁽²⁾, first given by FERMI, TELLER and WEISSKOPF ⁽³⁾ and detailed, later on, by other

⁽¹⁾ E. AMALDI and G. FIDECARO: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 93 (1950).

⁽²⁾ M. CONVERSI, E. PANCINI and O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **68**, 232 (1945); **71**, 209 (1947); *Nuovo Cimento*, **3**, 37 (1946); *Rend. Acc. Lincei*, **2**, 56 (1947).

⁽³⁾ E. FERMI and E. TELLER: *Phys. Rev.*, **72**, 399 (1947); E. FERMI, E. TELLER and V. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **71**, 314 (1947).

Authors (⁴). One could object against this point of view, however, that it is not evident that conclusions regarding the nuclear interactions between nucleons and mesons almost at rest, can be immediately extrapolated to the case of μ -mesons of some hundred MeV kinetic energy.

This remark finds some support in the recent experimental results of EVANS and GEORGE and GEORGE and TRENT. Working at sea level under a clay thickness equivalent to 60 m water, these Authors found: 1) using Ilford Nuclear Research photographic plates (⁵) a production of stars; 2) using an almost conventional counter device (⁶) a local production of penetrating showers. To such a great depth it seems reasonable to assume that both these types of events can not be produced by components of the cosmic radiation different from μ -mesons. The Authors above mentioned deduced a cross section of the order of 10^{-29} cm²/nucleon for each one of the two observed effects (non necessarily independent from each other) (⁷).

Such a value of the cross section is enormously larger than the value that one would expect on account of the capture of slow mesons by light nuclei; but still smaller than the lower values obtained by different Authors by means of direct observation of the anomalous scattering (⁸).

A large error in this last type of experiments can be due to the existence, at sea level, of a small admixture of protons with mesons (⁹) (¹).

As we will see in section 4, we can deduce from our measurements an upper limit for the large angle scattering cross section appreciably lower than that given previously by other Authors (⁸).

2. - The experimental device.

Fig. 1 shows our experimental device in a schematic way.

The solid angle of the impinging particles is defined by two telescopes, $B'_1B'_2B'_3B'_4$ and $B''_1B''_2B''_3B''_4$, placed one behind the other, in order to increase

(⁴) B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **5**, 325 (1948); H. FRÖLICH: *Nature*, **160**, 255 (1947); **162**, 450 (1948).

(⁵) J. EVANS and E. P. GEORGE: *Nature*, **164**, 20 (1949).

(⁶) E. P. GEORGE and P. T. TRENT: *Nature*, **164**, 838 (1949).

(⁷) We thank Mr. GEORGE for having send us the manuscript of an extensive paper by him and Mr. EVANS which will appear in the *Proc. Roy. Soc.*

(⁸) P. M. S. BLACKETT and J. G. WILSON: *Proc. Roy. Soc., A*, **165**, 209 (1938); J. A. VARGUS: *Phys. Rev.*, **56**, 480 (1939); J. G. WILSON: *Proc. Roy. Soc., A*, **174**, 73 (1940); F. L. CODE: *Phys. Rev.*, **59**, 229 (1941); R. P. SHUTT: *Phys. Rev.*, **61**, 6 (1942); **69**, 128, 261 (1946); M. S. SINHA: *Phys. Rev.*, **68**, 153 (1945); W. T. SCOTT and H. S. SNYDER: *Phys. Rev.*, **73**, 1260 (1948).

(⁹) J. A. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 133 (1949).

the intensity without increasing too much the angular indefinition in the direction perpendicular to the plane of the figure (see table I). Counters A are in parallel and placed under 15 cm of Pb and above 5 cm of Pb, so that

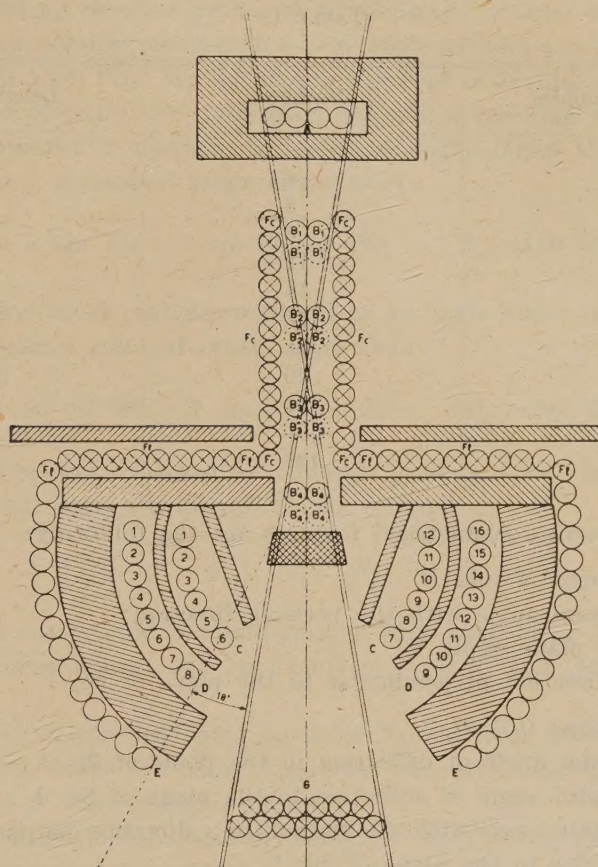


Fig. 1.

the soft component is completely absorbed and the spectrum of the hard component is used from its maximum up towards higher energies. $F_c + F_t$ are an anticoincidence set of counters for lateral protection. The scatterer, 6 cm thick, covers almost exactly the solid angle defined by the two telescopes B' and B'' .

Counters C and D are connected to a hodoscope of neon lamps and give some rough informations about the direction of motion of the particles impinging on it. Two layers of Pb, each 2,5 cm thick, are placed in front of counters C and between counters C and D . Counters E are all in parallel and separated from counters D by 10 cm Pb. Counters G are a second anti-

coincidence set. In table I we give the numbers and lengths of all counters whose diameter was 4 cm.

TABLE I.

Type of counter	Number	Length in cm
<i>A</i>	4	60
<i>B'</i>	8	20
<i>B''</i>	8	20
<i>C</i>	12	50
<i>D</i>	16	50
<i>E</i>	28	135
<i>F_c</i>	28	60
<i>F₁</i>	20	100
<i>G</i>	13	100
	137	

Other interesting geometrical features are the following:

a) telescopes *B'* and *B''*

maximum angle with the vertical direction:

in the plane of fig. 1 $\vartheta_0 = 8^\circ$

in a direction perpendicular to the plane of fig. 1 . . . $\varphi_0 = 20^\circ$

b) hodoscope *C + D*

minimum angle of deflection in the plane of fig. 1 . . . $\alpha_m = 18^\circ$

maximum angle of deflection in the plane of fig. 1 . . . $\alpha_M = 110^\circ$

maximum angle with the vertical in a direction perpen-

dicular to the plane of fig. 1 $\Phi_M = 60^\circ$

By means of circuits that will be described later, we count the following type of events:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= A + B' \text{ (or } B'') + (C + D) - F - G \\
 N_2 &= A + B' \text{ (or } B'') + G + (C + D) - F \\
 N_3 &= A + B' \text{ (or } B'') + G - F \\
 N_4 &= A + B' \text{ (or } B'') + (C + D) + E - F - G,
 \end{aligned}$$

N_3 is the total number of particles crossing the two telescopes with a range larger than $R_0 = 20$ cm Pb + 6 cm Fe (or Pb). Therefore this number gives the intensity of the impinging radiation.

N_2 is the number of particles (single or multiple) crossing the two telescopes and not the anticoincidence *F*, that give rise in the scatterer to at least a particle crossing the hodoscope *C + D*.

Two types of events give the main contribution to N_2 :

a) electronic secondaries of single penetrating particles emitted at a large angle with an energy large enough to cross at least 5 cm Pb;

b) penetrating showers produced by ionizing particles in the scatterer with at least one particle emitted at a large angle with an energy large enough to cross at least 5 cm Pb. We include, in this type of events, also penetrating showers of two particles: the impinging one and a recoiling particle.

N_1 is the number of particles scattered at angles larger than 18° having, after the collision, a residual range larger than

$$R_m = 5 \text{ cm Pb} + 7 \text{ cm Fe (or Pb)} \quad (T_\mu \geq 180 \text{ MeV}).$$

N_4 is the number of particles scattered at an angle larger than 18° having, after the collision, a residual range larger than

$$R_M = 15 \text{ cm Pb} + 7 \text{ cm Fe (or Pb)} \quad (T_\mu \geq 300 \text{ MeV}).$$

Our hodoscope was triggered by a master pulse in such a way that is was photographed automatically for all events of type

$$N_1, \quad N_2, \quad N_4.$$

These three cases could be distinguished from each other by the glowing of convenient neon lamps: one for events of type N_2 and one for events of type N_4 .

The intensity of the impinging particles N_3 was large enough (5.4 min^{-1}) to allow to check, every few hours during the measurements, that all counters A , B' , B'' and F were working properly.

In order to check the behaviour of counters C and D , every day, we observed on the hodoscope, for about half an hour, events of type

$$B_4 + C + D \quad \text{and} \quad B_4 + C + D + E,$$

due to showers and mesons impinging obliquely on the counters.

Every two days we checked the plateau of all the counters and the pulses, both at the input and at the output of all tubes.

Only five counters have been substituted during all the measurements since their plateau, initially of about 150-200 volt, decreased to about 30-40 volt.

Our circuits can be divided in three main parts:

- 1) a pilot circuit composed of coincidence and anticoincidence sets;
- 2) a hodoscope;
- 3) various protecting automatic devices which eliminate electric disturbances, and allow a continuous operation of the apparatus.

The pilot circuit (Fig. 2) supplies a master pulse to the hodoscope for every event of type N_1 or N_2 ; at that moment all the neon lamps are capable of lighting, but the hodoscope provides that only neon lamps connected to counters that have been crossed by particles will actually light.

Pulses of each counter, or group of counters, are amplified and sent to coincidence circuits C_2 (double) C_4 (fourfold). S are used to collect pulses coming from many similar circuits. A are anticoincidence circuits and R circuits introduced to equalize and delay the pulses to be sent to other coinci-

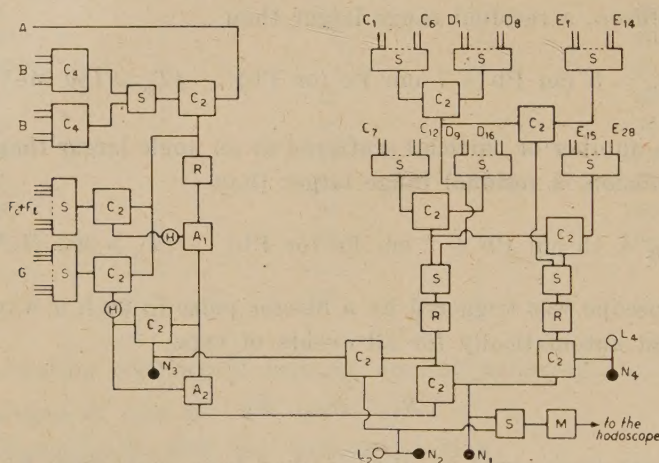


Fig. 2.

dence circuits; H are circuits that lengthen in time the pulses and finally N circuits that trigger the mechanical counters. The resolving time of the coincidences circuit was 10 μ s.

In Fig. 3 we give the scheme of one unit of the hodoscope.

The pulse of the counter, amplified by the first tube, is sent contemporarily to the pilot circuit of Fig. 2 and to a double coincidence circuit which transmits the signal only if the pulse of the counter is time coincident with the master pulse coming from the pilot circuit.

The protecting devices consisted in:

a) the usual stabilized power supplies for all tubes and a specially carefully adjusted power supply for the counters high voltage;

b) a group of relays which blocks the mechanical counters in case of interruption of the a. c., and provides to switch on the anodic voltage and the counters high voltage 1 minute after the beginning of the heating of the cathodes of all tubes;

c) two automatic switches which turn off the anodic voltages if the a. c. goes out of a conveniently prefixed interval and a registering instrument which records the actual time of measurements;

d) an electronic protecting circuit which blocks the mechanical counters in case of transients on the anodic voltages coming from the main net.

The efficiency of the anticoincidence G was measured by counting contemporary, without scatterer, the events $A + B - G$ and $A + B + G$, and turned out to be

$$\frac{A + B - G}{A + B + G} = (1,3 \pm 0,1) \%.$$

The most frequent type of chance coincidences is due to a particle crossing the telescope $A + B'$ (or B'') at the same time that a particle is crossing the

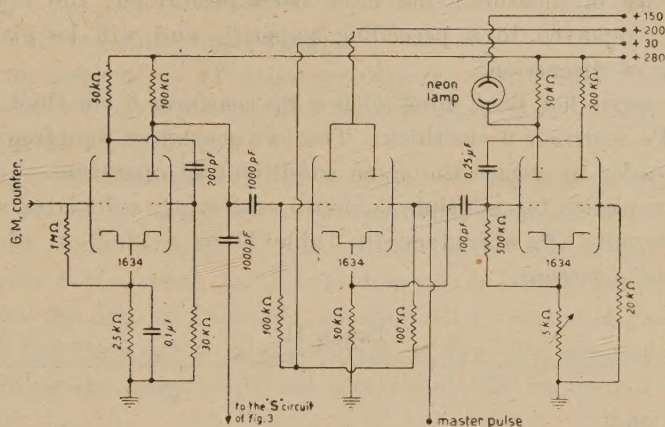


Fig. 3.

hodoscope $C + D$. Considering that the number of particles crossing $A + B + G$ is much larger than the number of particles stopping in the scatterer and therefore giving an event $A + B - G$, we have to expect a much higher number of chance coincidences for events N_2 than for events N_1 .

Therefore we measured the chance coincidences for events N_2 by substituting the telescope $A + B + G$ with a convenient pulser (giving 5000 pulses/min) and leaving everything else in the normal conditions of work: the chance coincidences were measured by means of both mechanical counters and photographic method. By such a way we found 88 chance coincidences for 1836 000 events $A + B + G - F$ i.e. of type N_3 .

Furthermore we found, by inspection of the pictures of the hodoscope, that 31 of these 88 chance coincidences had the appearance of a scattered particle because the glowing neon lamps were aligned with the scatterer. Of these 31 events, 23 corresponded to penetrating particles i.e. particles crossing also the set E of counters.

The chance coincidences for events N_1 can be deduced from previous results considering:

a) the number of mesons stopped in the scatterer: these represent 2,7 % of all mesons crossing $A + B + G - F$;

b) the efficiency of the anticoincidence G which is 1,3 %.

Therefore we have to expect a number of chance coincidences for events N_1 equal to $(31/88) \times 4 \% = 1,4 \%$ the number of chance coincidences for events N_2 .

3. - The experimental results.

Three series of measurements have been performed; the first two have been already reported in a preceding paper (1) and will be given here for completeness of discussion.

The first series has been done with a Pb scatterer 6 cm thick; the second one with a Fe scatterer 6 cm thick. The two scatterers were frequently interchanged in order to ensure the same conditions of operation.

The mean angles for multiple coulomb scattering, calculated according to Williams' formula (10) are given in Table II as a function of the kinetic energy $T_{0\mu}$ of μ -mesons.

TABLE II.

$T_{0\mu}$ MeV	$\bar{\alpha}$	
	Fe	Pb
180	4° 40'	8° 40'
240	3° 30'	7°
300	3°	5° 50'

As we see from Fig. 1 the experimental device has been drawn in such a way that the minimum angle of scattering ($\alpha_m = 18^\circ$) was much larger than $\bar{\alpha}$ for the Fe scatterer, but not for the Pb scatterer; this last element was used to check this point.

The third series of measurements was performed, with the same Fe scatterer as the second one, filtering the impinging mesons with a brick layer about 200 g/cm² thick. This absorber (placed on the terrace above the room where experimental device of Fig. 1 was mounted) was sufficiently wide to ensure that the solid angles defined by the two telescopes $A + B'$ (and B'') were completely covered. In Table III we give our results on scattered particles.

(10) E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc., A*, **169**, 531 (1939).

TABLE III.

Set of measurements	Absorber	Scatterer	Total time t	Number of particles per min N_3/t	Total number of impinging particles N_3	Total number of scattered particles	
						180-300 MeV	300 MeV <
						$N_1 - N_4$	N_4
1	—	Pb	230 ^b 16 ^m	5,33 \pm 0,02	73 769	13	—
2	—	Fe	765 ^b 10 ^m	5,44 \pm 0,01	249 168	3	3
3	200 g/cm ²	Fe	706 ^b 23 ^m	4,84 \pm 0,01	204 914	1	—

We can add the following remarks:

a) in the second set of measurements we had 2 more events of type $N_1 - N_4$ which we have disregarded because they were caused by particles not coming from the scatterer;

b) only in one case with the Pb scatterer we had a large angle scattering ($C_{11}D_{15}$, fig. 1); in all other cases the particles recorded were scattered at smaller angles. For instance in case of Fe, in the second series one C_8D_{11} event and two C_7D_9 events, in the third series one C_6D_8 event;

c) beside the data of Table III we observed 15 events in the second, and 24 events, in the third set of measurements, of type N_2 ; the two numbers are coincident inside the large statistical errors and will be treated together in the following.

Finally in a convenient absorption measurements we found that the number of mesons with range between R_m and R_M represented 4,7 % of the total number of mesons of range larger than $R_0(N_3)$ in excellent agreement with what one can deduce from the Wilson spectrum (4,77 %) ⁽¹¹⁾.

4. - Discussion of the experimental results.

We can try now to use the data of Table III to give an upper limit of the anomalous scattering cross section of μ -mesons by nucleons. If we call N_n the number of nucleons per cm² of our scatterer, N_i the number of impinging μ -mesons belonging to a given energy interval and \bar{N} the mean value of the number n of the corresponding scattered mesons recorded by the hodoscope, we have

$$(1) \quad \sigma = \frac{\bar{N}}{N_n \times N_i \times \eta},$$

⁽¹¹⁾ J. G. WILSON: *Nature*, **158**, 414 (1946).

where η is a factor, depending on the geometry of the hodoscope and on the angular distribution of the scattered μ -mesons, representing the percentage of the anomalously scattered mesons which are actually recorded by the hodoscope.

In appendix I it is shown that η is about 1/5 for angular distributions of the scattered μ -mesons isotropic or almost isotropic in the center of gravity system.

In order to get the numbers N_i , we note that mesons scattered at about 20° with kinetic energies of about 180 or 300 MeV must have, before the collision, energies of at least 200 or 320 MeV respectively, while N_3 is the number of mesons impinging on the Fe scatterer with a kinetic energy equal or larger than 100 MeV ($R_m = 6$ cm Fe \rightarrow 66 g/cm² Pb⁽¹²⁾).

From these data and the spectrum of μ -mesons at sea level, filtered by 20 cm Pb we get

$$\begin{aligned} \text{for } 200 \leq T_{0\mu} \leq 320 \text{ MeV,} \quad N_i &= 4,7 \times 10^{-2} N_3, \\ \text{for } 320 \leq T_{0\mu}, \quad N_i &= (1 - 8,6 \times 10^{-2}) N_3 = 0,914 N_3, \end{aligned}$$

in very good agreement with what we found from the absorption experiment mentioned at the end of section 3.

Introducing these values and $N_n = 2,82 \cdot 10^{25}$ in equation (1), we get

$$(2) \quad \begin{cases} 200 \leq T_{0\mu} \leq 320 \text{ MeV,} & \sigma = 1,51 \cdot 10^{-29} \bar{N}, \\ 320 \leq T_{0\mu} & \text{MeV,} & \sigma = 7,8 \cdot 10^{-31} \bar{N}, \end{cases}$$

for the second series of measurements, and

$$(3) \quad \begin{cases} 200 \leq T_{0\mu} \leq 320 \text{ MeV,} & \sigma = 1,84 \cdot 10^{-29} \bar{N}, \\ 320 \leq T_{0\mu} & \text{MeV,} & \sigma = 9,48 \cdot 10^{-31} \bar{N}, \end{cases}$$

for the third series of measurements.

We can not, simply, introduce in equations (2) and (3) in place of N , the numbers n of counts recorded in each series of measurements meanly for two reasons: first because other effects, different from the anomalous scattering, can give an appreciable contribution to the few observed events, and second because the numbers n are so small that the corresponding statistical fluctuations are of the same order of magnitude of n .

Effects different from the anomalous scattering of μ -mesons by nucleons, are considered in details in Appendix 2 and 3. The corresponding results, obtained taking into account the actual time of measurements and the geometric conditions of the experimental device, are summarized in Table IV.

Single coulomb scattering has been calculated considering as scattering centers, once the Fe or Pb nuclei of finite size, and once all single protons present

⁽¹²⁾ G. C. WICK: *Nuovo Cimento*, **3**, 302 (1943).

in the scatterer as point charges: the results obtained under the second assumption, constitute certainly an upper limit ⁽¹³⁾.

The electromagnetic interaction for spin 1 can be disregarded as we have other evidence against such an assumption. Chance coincidences deduced from the data given in section 3 are negligible. Therefore we can conclude that beside the anomalous scattering of μ -mesons, practically we have to consider only the scattering of protons by nucleons, for the Fe scatterer, and also the multiple coulomb scattering for the Pb scatterer. As already mentioned in section 3 the Pb scatterer was used just in order to have an appreciable number of scattered particles which allowed, during the measurements, to check the efficiency of the experimental device.

TABLE IV.

Numbers of counts	Pb		Fe			
	low energy	high energy	2 series		3 series	
			low energy	high energy	low energy	high energy
Observed	13	0	3	3	1	0
Expected for:						
multiple coulomb scattering . .	7	0	<0,04	0	0	0
Single coulomb scattering by nuclei	0,07	0,007	0,26	0,026	0,21	0,021
Single coulomb scattering by protons	0,18	0,23	0,48	0,62	0,39	0,51
Spin interaction (spin 1)	0	1,5	0	4	0	4
Scattered protons	1,3	0,6	3	1,5	0,9	0,4
Chance coincidences	0,01	0,04	0,04	0,13	0,04	0,10

The number of scattered protons is rather uncertain as it appears from the considerations given in Appendix 3. Its calculation involves the number and energy spectrum of protons present in the cosmic radiation at sea level and their differential cross section for elastic collision against nucleons; therefore the numbers of scattered protons given in Table IV can be affected by large errors.

The 3^d series of measurements, in which the impinging μ -mesons were filtered with a brick absorber 200 g/cm² thick has been done mainly in order to check this point; in fact we expect that such an absorber reduces the nucleonic component by a factor between 3 and 4 and the mesonic component

⁽¹³⁾ See the following paper by E. AMALDI, G. FIDECARO e F. MARIANI: *Nuovo Cimento*, **7**, 553 (1950).

only by about 10 %. The numbers of counts recorded in the second and third set of measurements are too small to allow any quantitative conclusion: their difference, however, is in the direction expected if protons would give an appreciable contribution to the observed scattered particles.

In order to deduce an upper limit for the cross section for anomalous scattering of μ -mesons, we consider the following probability problem: assum-

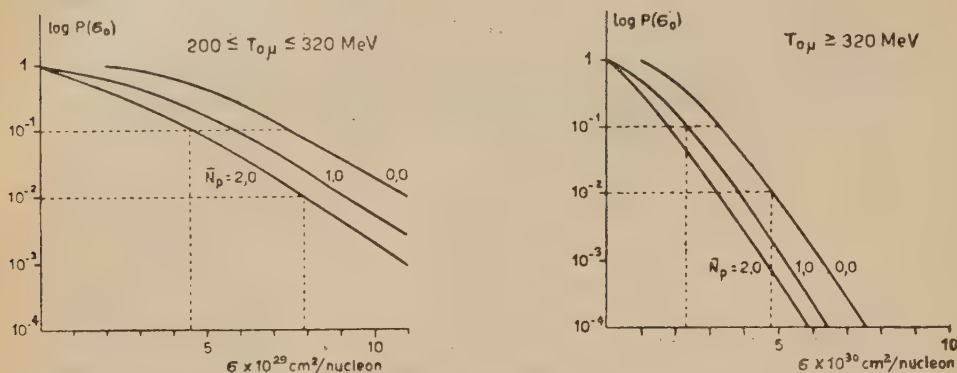


Fig. 4.

ing that the cross section for anomalous scattering of μ -mesons by nucleons is larger or at least equal to a given value σ_0 , we ask what is the probability $P(\sigma_0)$ that we have recorded n' counts in the second and n'' counts in the third set of measurements.

Considering the two sets of measurements as independent events and reducing the second set to the same number of impinging μ -mesons as the third one, $\left(n' = 3 \frac{7,05 \cdot 10^5}{2,49 \cdot 10^5} = 2,47\right)$ we have

$$(4) \quad P(\sigma_0) = \frac{\sum_{\bar{N}} \bar{W}(\bar{N} + \bar{N}'_p, n') \cdot \bar{W}(\bar{N} + \bar{N}''_p, n'')}{\sum_{\bar{N}} \bar{W}(\bar{N} + \bar{N}'_p, n') \cdot \bar{W}(\bar{N} + \bar{N}''_p, n'')}$$

where

$$\bar{W}(\bar{N}, n) = \frac{\bar{N}^n}{n!} \exp[-\bar{N}],$$

is the Poisson distribution, \bar{N}'_p and \bar{N}''_p the mean numbers of scattered protons that we expect to observe in 706^h respectively without the brick absorber and with the brick absorber.

The value of σ_0 appearing on the left side of equation (4) is obtained introducing in the equation (3) $\bar{N} = 0, 1, 2, \dots$. In Fig. 4 we give a logarithmic

plot of $P(\sigma_0)$ for the two energy intervals and for a few values of \bar{N}'_p, \bar{N}''_p . If according to the previous discussion of the scattered protons, we do the reasonable (certainly not extreme) assumption that in the low energy band we have $\bar{N}'_p = 2, \bar{N}''_p = 0$, and in the high energy band $\bar{N}'_p = 1, \bar{N}''_p = 0$, we get the values of $P(\sigma_0)$ collected in Table V.

TABLE V.

$P(\sigma_0)$	10^{-1}	10^{-2}
for $200 \leq T_{0\pi} \leq 320$ MeV for $320 \leq T_0$ MeV	$\sigma_0 = \begin{cases} 4,5 \cdot 10^{-29} \\ 2,3 \cdot 10^{-30} \end{cases}$	$\begin{cases} 7,9 \cdot 10^{-29} \\ 3,8 \cdot 10^{-30} \end{cases} \text{ cm}^2/\text{nucleon}$

We are not interested in $P(\sigma_0)$ but in the inverse probability. Although many criticisms can be raised against the inversion of the probability, we can conclude that it is very improbable that the cross sections for anomalous scattering of μ -mesons by nucleons are larger than the values given in Table V.

Such a conclusion is further strengthened by the fact that our estimate of the number of scattered protons is rather conservative.

We have to add a few words about the events of type N_2 which are 39 for 454182 impinging mesons of $T_{0\mu} \geq 100$ MeV.

We expect that among these 39, about 22 are due to chance coincidences. This expectation is confirmed by the inspection of the corresponding pictures of the hodoscope in which we found 21 chance coincidences. Therefore we have about 15-20 events of type N_2 for about $4,5 \cdot 10^5$ impinging μ -mesons. Let us assume that the electronic secondaries (see section 2) are negligible with respect to the penetrating showers; these last will be produced in part by high energy protons and in part by μ -mesons⁽⁶⁾. Under the extreme assumption that all the observed events of type N_2 are due to penetrating showers produced by μ -mesons, we get a cross section for production of showers smaller than 10^{-30} cm²/nucleon.

Both cross sections for anomalous scattering and for production of showers by μ -mesons can be compared with the results of EVANS and GEORGE and GEORGE and TRENT⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾.

Our cross sections are appreciably lower than that given by these Authors. The difference, however, could be due to the much higher energy of the impinging μ -mesons in the experimental conditions of these Authors: under a layer equivalent to 60 m of water the mean energy of μ -mesons is about $1,4 \cdot 10^{10}$ eV while at sea level it is of the order of 10^9 eV.

GEORGE and EVANS⁽⁷⁾ interpret their results as due to the electromagnetic interaction of the impinging μ -mesons with the nuclear meson fields; according

to this scheme one would expect a cross section for μ -mesons at sea level at least 10 times smaller than at 60 m water equivalent.

Our thanks are due to M. AGENO and G. BERNARDINI for their contributions to the present work and to B. FERRETTI for many valuable discussions. Dr. M. A. TUVE, director of the Department of Terrestrial Magnetism of the Carnegie Institution of Washington has given us a part of the radio equipment used in this experiment. We acknowledge the S. A. Innocenti for having kindly supplied the iron structure on which our experimental device was mounted.

APPENDIX I.

Solid angle subtended by the hodoscope.

The notation is evident from inspection of fig. 5, 6 and 7. The numerical values are the following: $h = 55$ cm, $d = 8$ cm, $l/2 = 20$ cm, $p = 31$ cm, $c = 50$ cm.

From fig. 5 one can immediately derive the following expression for the solid angle defined by the hodoscope with respect to points on the axis of the scatterer

$$\Omega = 2(\Theta_0'' - \Theta_0') \left[\frac{\frac{c-z-5}{p}}{\left[1 + \left(\frac{c-z-5}{p}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\frac{z+5}{p}}{\left[1 + \left(\frac{z+5}{p}\right)^2\right]^{1/2}} \right].$$

The factor 2 is due to the symmetry of the hodoscope. Varying z from 0 to $l/2$, the factor multiplying $(\Theta_0'' - \Theta_0')$ increases rapidly from 2,04 to 2,4, and then, slowly, from 2,4 to 2,5. Therefore we can assume that such a factor is constant with respect to z and equal to 2,4. Taking $\Theta_0'' - \Theta_0' = 60^\circ$ we get

$$\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1}{5}.$$

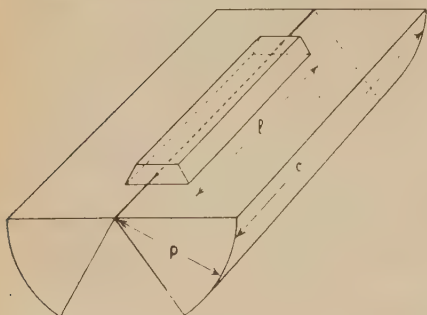


Fig. 5.

One could simply assume the factor η , appearing in equation (1), equal to $\Omega/4\pi$. Before doing that we have calculated η also according to the following lines.

The angular distribution, in the center of gravity system, of mesons scattered anomalously by nucleons, is expected to be (if such an effect due to nuclear interaction exists) of the type $A + B \cos \vartheta$ or $A + B \cos^2 \vartheta$ with $B \leq A$. For $B = 0$ (isotropic scattering) one can calculate immediately by means of a Lorentz transformation, the angular distribution that we have to

expect in the laboratory system. From such a calculation we found that, for kinetic energies of the order of 200-400 MeV, more than 1/2 of the scattered μ -mesons are scattered at angles larger than 22° and that about 1/2 of these will be detected by our hodoscope. That means that for isotropic scattering $\eta \sim 1/4$.

Considering that for $\beta > 0$ one would expect a smaller value of η , we have finally assumed $\eta \sim 1/5$ as it is suggested by the more simple original geometric consideration.

APPENDIX 2.

Contribution due to Coulomb scattering.

Fig. 6 shows schematically the telescope and the scatterer. We have to distinguish region *a* (full illumination) from region *b* (penumbra); this last has been greatly exaggerated in the figure. Although *b* is much smaller than *a* its contribution is not negligible because mesons scattered in *b* need a smaller angle of deflection in order to trigger the hodoscope.

a) *Single coulombian collisions.* — We use the following notations:

t = thickness of the scatterer in cm;

E = total energy of impinging μ mesons;

λ = wave length divided by 2π of the impinging meson;

N_n = number of nuclei/cm³;

b = dimensions of the nucleus.

The elementary solid angles of the impinging particles and of the scattered ones, are respectively

$$(I) \quad d\omega = d\vartheta_0 \cos \varphi d\varphi, \quad d\Omega = d\Theta_0 \cos \Phi d\Phi.$$

For region *a* we can assume that the intensity of the impinging mesons is constant inside the solid angle defined by the two telescopes.

We will calculate the contribution due to single scattering by Fe nuclei using Williams' (10) formula taking into account the finite dimensions of the nucleus.

With elementary considerations we find the following expression for the probability *f* that a meson triggers the hodoscope after a single coulombian collision with an Fe nucleus

$$(II) \quad f = \frac{2}{d \times \frac{l}{2} \times d \times \frac{l}{2}} \frac{N_n t Z^2 e^4}{5 E^2 \beta^4} \int_0^{l/2} dz \int_{\Phi'}^{\Phi''} \cos \Phi d\Phi \int_0^d dy \int_{\vartheta_0'(y)}^{\vartheta_0''(y)} d\vartheta_0 \int_{\Theta_0'}^{\Theta_0''} d\Theta_0 \times \\ \times \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\cos \varphi dy}{\sin^4 \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^2},$$

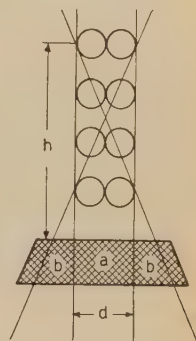


Fig. 6.

with

$$\begin{aligned}\varphi' &= -\operatorname{artg} \frac{z}{h} \cos \vartheta_0, & \varphi'' &= \operatorname{artg} \frac{\frac{l}{2} - z}{h} \cos \vartheta_0 \\ \Phi' &= -\operatorname{artg} \frac{\frac{c-l}{2} + z}{p}, & \Phi'' &= \operatorname{artg} \frac{\frac{c-l}{2} + z}{p}.\end{aligned}$$

Considering that the angle of deflection δ is always $\geq 20^\circ$ and $E \geq 300$ MeV and that in these extreme conditions $b^2/\lambda^2 \sin^2 \delta/2 \leq 1.41$, we can neglect, in the denominator of the integrand, 1 with respect to $b^2/\lambda^2 \sin^2 \delta/2$. The error introduced by this rather rough approximation can be evaluated to be of the order of 15 % and in the sense to increase the probability of the coulomb single scattering.

The integrand in (II) reduces to

$$(III) \quad \frac{\lambda^4 \cos \varphi \, d\varphi}{b^4 \frac{\delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}},$$

where

$$(IV) \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos \varphi \cos \Phi \cos (\vartheta_0 - \Theta_0) + \sin \varphi \sin \Phi \}.$$

By neglecting in the denominator of (III) terms in φ^2 , one can easily perform the integration with respect to φ between the fixed limits $\varphi' = -10^\circ$ and $\varphi'' = +10^\circ$. One can recognise that such an approximation is allowed because the integration interval $\varphi'' - \varphi'$ is constant (inside 3 %) and equal to 20° when z varies from 0 to $l/2$ and the value of the integral is rather insensitive to variations of the limits.

The integration with respect to Φ has been done numerically between the fixed limits $\Phi' = -40^\circ$ and $\Phi'' = +40^\circ$, because the angular interval $\Phi'' - \Phi'$ is almost constant with respect to z and the integrand is very small in the regions of variation of Φ' and Φ'' with respect to its value in the region around $\Phi = 0$. After that, the integration with respect to z results in a factor of $l/2$; the result, that we call

$$(V) \quad P(\vartheta_0 - \Theta_0) = P(\beta),$$

is a function of Θ_0 , ϑ_0 and y . This last variable appears in the limits of integra-

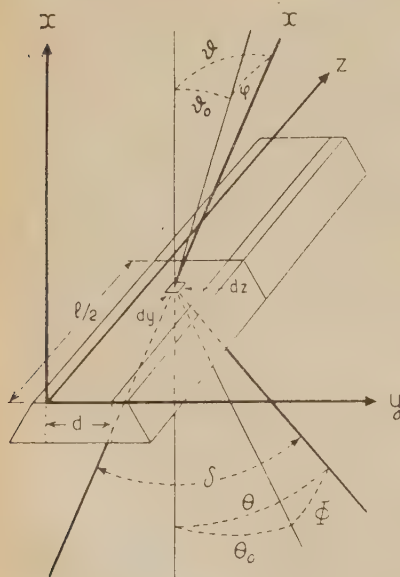


Fig. 7.

tion of ϑ_0 and Θ_0 . Using, as independent variables, instead of Θ_0 , ϑ_0 and y , β , ϑ_0 and y one can perform immediately the integration with respect to ϑ_0 and then do numerically the integrations with respect to y and β .

The contribution of the penumbra region (1 cm wide on each side) has been calculated using an expression similar to (1) with the only difference that the limits of integration with respect to y are functions of ϑ_0 . We have used the function (V) which has been integrated numerically, between the new limits, with respect to all the three variables ϑ_0 , y and β . The contribution of the penumbra region b turned out to be 40% of the contribution of the region a .

We have calculated in a similar way also the single collision against the single protons present in the scatterer assuming that they have an electromagnetic radius equal to zero ⁽¹³⁾. For such a calculation we have used Rutherford's formula i.e. we have put in (I) $b = 0$ (and, of course, $Z = 1$ and N_n 26 times larger than in preceding calculations).

Following a quite similar procedure, we have calculated the single scattering also in the case of mesons of spin 1 and magnetic moment equal to a mesonic magneton ⁽¹⁴⁾.

b) Multiple scattering. — A similar calculation has been performed also for the multiple scattering using the Gaussian distribution given by WILLIAMS ⁽¹⁰⁾ for the deflection projected in a plane. Two main approximations are involved in this calculation: the first one is due to the fact that the gaussian representation is no more correct at large angle, and the second one is due to the finite length of the counters of the hodoscope. Both approximations do not seem to be important.

APPENDIX 3.

Contribution of scattered protons.

a) Total number and energy spectrum. — Proton impinging on our experimental device and contributing to the observed scattered particles, must have kinetic energies ranging from 680 MeV to about 1000 MeV. In this range of energy we have assumed a differential spectrum of the type kdT_p/T_p^m . Two values of m have been used: $m = 2,6$ and $m = 1,5$. The first value, corresponding to the spectrum of primaries, is certainly too high; the lower value is chosen to represent in a satisfactory way the spectrum of protons at sea level as it has been deduced by FERRETTI in a discussion of the star producing radiation ⁽¹⁵⁾. The constant k has been calculated using that part of the proton spectrum observed by ANDERSON and coworkers at 9000 m above s.l. ⁽¹⁶⁾ which extends from $T_p = 200$ to $T_p = 400$ MeV and assuming three different values for the absorption mean free path in air $\lambda = 125, 135, 145$ g/cm².

⁽¹⁴⁾ W. PAULI: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941).

Values given in table IV correspond to $m = 1,5$ and $\lambda = 135 \text{ g/cm}^2$.⁽¹⁷⁾ With $m = 2,6$ the ratio of the number of low energy to the number of high energy scattered protons turns out to be 3 instead of 2. The number of scattered protons in the low energy band turns out to be ~ 2 , ~ 3 and $\sim 4,4$ according to the used value of λ .

b) *Total scattering cross section and angular distribution.* - For the total scattering cross section we have the empirical relation

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{T_p},$$

deduced by the neutron-proton scattering below 100 MeV: $\sigma_0 = 6,85 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \text{ MeV}$ for collisions against neutrons and about half this value for collisions against protons⁽¹⁸⁾.

For the angular distribution we have used the expression deduced by ROHRlich and EISENSTEIN⁽¹⁹⁾ for central forces and a Yukawa well, transformed to the laboratory system as an electrostatic potential.

We have taken into account the protons scattered both by neutrons and protons present in the scatterer, as well as the recoiling protons. The data given in Table IV have been calculated taking into account the energy of the protons as a function of the scattering angle and the geometry of the hodoscope (see Appendix 1).

The absorption mean free path in the brick absorber has been assumed to be 160 g/cm^2 .

⁽¹⁵⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 379 (1949).

⁽¹⁶⁾ R. V. ADAMS, C. D. ANDERSON, P. E. LLOYD, R. R. RAN and R. C. SAXENA: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 334 (1948).

⁽¹⁷⁾ R. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

⁽¹⁸⁾ J. HADLEY, E. KELLY, C. LEITH, E. SEGRE, C. WIEGAND and H. YORK: *Phys. Rev.*, **75**, 351 (1949).

⁽¹⁹⁾ F. ROHRlich and J. EISENSTEIN: *Phys. Rev.*, **75**, 705 (1949).

RIASSUNTO

Per mezzo di un odoscopio contatore che permette di distinguere due bande di energie: da 200 MeV a 320 MeV d'energia cinetica e da 320 MeV all'infinito, è stato saggiato lo «scattering» di mesoni μ veloci prodotto da una lamina di ferro di 6 cm di spessore. Sono stati contati circa 500 000 mesoni incidenti. Si ottiene un limite superiore per la sezione d'urto per scattering anomalo: circa $4,5 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2/\text{nucleone}$ nella banda inferiore d'energie; circa $2,3 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2/\text{nucleone}$ nella banda superiore d'energie.

On the coulomb scattering of μ -mesons by light nuclei.

E. AMALDI, G. FIDECARO and F. MARIANI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 12 maggio 1950)

Summary. — Using a «one particle model» of the nucleus, the coulomb scattering of μ -mesons by light nuclei is treated in Born approximation. One has to distinguish a coherent scattering and an incoherent scattering as in the case of X-rays or slow electrons scattered by atoms. Using a parabolic well model one can derive, in an elementary way, an expression of the coherent scattering cross section which is an extension of the well known Williams' formula. Such an expression can be useful in the case of μ -mesons of such a high energy, that the corresponding λ turns out to be comparable with the distance of protons inside the nucleus. Also the spectra of the incoherently scattered μ -mesons are derived in an elementary way. Finally the influence on the coherent + incoherent scattering, of a finite value of the electromagnetic radius of the proton is discussed.

1. — Introduction.

In the course of the investigation of the anomalous scattering of fast μ -mesons by nuclei ⁽¹⁾, we have been confronted with the problem of calculating the coulomb scattering. This problem has been treated by WILLIAMS ⁽²⁾ under the assumption that the nuclear charge Ze of a nucleus is spread almost uniformly over the volume of the nucleus itself.

Such a model can be considered satisfactory as long as the impinging particles have a wavelength long compared with the mean distance of protons

⁽¹⁾ E. AMALDI e G. FIDECARO: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 93 (1950); *Phys. Rev.*, in press; *Nuovo Cimento*, see the preceding paper.

⁽²⁾ E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc.*, A **169**, 531 (1938).

inside the nucleus. But as soon as λ is of the same order of magnitude or shorter than such a distance, we have to consider the nuclear protons as Z centers of coulombian forces distributed inside the nucleus.

One could object that such a refinement of the theory has not much practical importance on account of the fact that when the impinging particle penetrates a nucleus, we have to consider the nuclear forces which are still rather unknown and which will prevail on the Coulomb interactions, at least in average over the dimension of the nucleus.

Such an argument, quite resonable for protons or π -mesons, does not apply to the case of μ -mesons for which the only interaction that we have to consider is the one due to the electromagnetic field of the nucleons also for energies of the order of a few hundred MeV ⁽¹⁾; for such an energy λ is so small that we have to expect appreciable deviations from Williams' formula.

For kinetic energies of the impinging μ -meson of the order of a few hundred MeV its electromagnetic interaction with a nuclear proton is rather well represented by the simple Coulomb potential while, at higher energies, one has to consider also the spin interactions (and eventually other interactions).

In the present paper we will limit our considerations to μ -mesons of not too high energy so that we can neglect the spin interactions, which will be considered at a later time.

The problem can be treated in an elementary way in the first Born approximation if we assume that the nucleus can be represented by a « one-particle model » according to which each one of the Z protons is moving in a potential well of convenient shape and dimensions.

In order to be able to carry out the calculations, in a very simple form, up to numerical results, we have specified the potential well as a « parabolic well » (section 3). In such a model, which gives satisfactory results only for light nuclei ⁽³⁾ ⁽⁴⁾, each proton is represented by a threedimensional isotropic harmonic oscillator, whose $w = h\nu$ is the only parameter which we have to adjust in such a way that our model reproduces correctly one conveniently chosen experimental feature of the nucleus.

Considering the type of phenomena that we are investigating, we thought more convenient to adjust w in such a way that our model has the experimental spacial dimensions of the nucleus instead of the experimental value of the corresponding binding energy ⁽³⁾.

Before we carry on with the very simple analitical developments according to the above sketched lines, we would like to put in a few remarks.

Our problem is quite similar to that of the scattering of an electron, of a

⁽³⁾ W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **96**, 473 (1935).

⁽⁴⁾ H. A. BETHE and R. F. BACHER: *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 172 (1936).

few keV energy, by an atom, and therefore also to that of the scattering of X rays by an atom.

As in the classical work of DEBYE⁽⁵⁾ we will find a coherent scattering (section 4) and an incoherent scattering (section 5); in the first one the nuclear protons are not excited while in the second they undergo a transition from the ground state to an excited state.

The coherent scattering gives rise to a formula in which the RUTHERFORD relativistic differential cross section due to a charge Ze is multiplied by the square of a nuclear form-factor which, in first approximation, reduces to Williams' correction factor.

The incoherent scattering is proportional to Z and prevails on the coherent scattering at large angles and for high energies of the impinging μ -mesons. Obviously Williams' model can not give such a type of scattering.

Finally we will mention a point which seems to be of some interest in connection with the problem of the structure of the elementary particles.

• In the preceding discussion we have tacitly assumed that each proton acts on the μ -meson as a point-charge. On account of the nuclear forces the proton has a radius of about $1,3 \cdot 10^{-13}$ cm, but as far as we know, there are no definite arguments in favour or against the assumption that the electric charge of the proton is spread on the same spacial dimensions covered by the nuclear forces.

The problem is obviously connected with the nature of the nuclear forces and the existence of processes of emission and absorption of mesons (π , τ , ...) by a proton.

For instance, if the interpretation of the anomalous magnetic moment of the nucleons given by FRÖLICH, HEITLER and KEMMER⁽⁶⁾ has any connection with the nature of the elementary particles, and if the linear dimensions of the « pure proton state » are much smaller than the radius of the nuclear forces, one would expect an electromagnetic radius of the « observed proton » much smaller than its radius for nuclear forces⁽⁷⁾. By the way we point out that in such a scheme one would expect an electromagnetic interaction of μ -mesons also with neutrons similar to that of electrons with neutrons in addition to that due to the spins.

All these questions however are of a quite different type from those we have proposed to discuss in the present paper and have been mentioned only

⁽⁵⁾ P. DEBYE: *Ann. d. Phys.*, **46**, 809 (1915); *Phys. Zeits.*, **28**, 135 (1927); *Phys. Zeits.*, **31**, 419 (1930).

⁽⁶⁾ H. FRÖLICH, W. HEITLER and N. KEMMER: *Proc. Roy. Soc., A* **166**, 154 (1938).

⁽⁷⁾ Considerations of this type have been done by J. M. BLATT: *Phys. Rev.*, **67**, 205 (1945).

in order to show the «a priori» possibility that the electromagnetic radius of a proton is different from its radius as determined by the nuclear forces.

In the present paper we shall limit ourselves to discuss, in a pure phenomenological way, the influence of a finite electromagnetic radius of the proton on the coulomb scattering of μ -mesons by light nuclei.

In section 7 we will prove, in an elementary way, a theorem (valid in the one-particle model approximation) according to which one can transform the scattering cross section, calculated for a point-charge proton, into that valid for a proton of finite dimensions r_0 . In this last case the structure of the proton gives rise to a kind of proton-form-factor.

At the end of the paper (section 8) we will show that for very light elements the differential scattering (coherent + incoherent) cross section changes by a large amount if the electromagnetic proton radius r_0 is changed from a value of the order of $\hbar/M_\pi c$, which is certainly an upper limit, to a value of the order of $\hbar/M_p c$ which can be considered as a lower limit for r_0 .

2. - General relations.

The treatment of our collision problem, in BORN approximation, is elementary and will be given here only for completeness' sake. The analytical developments are very similar to those given by BETHE⁽⁸⁾ in the discussion of the collision of electrons of a few keV against atoms, as one has to expect on account of the similarity of the corresponding physical problems.

The problem is treated in the laboratory system in which, the nucleus before the collision is at rest; for the considered values of the energy of the impinging meson, it is practically identical with the center of gravity sistem (section 7).

The unperturbed wave function of the system μ -meson + nucleus will be

$$(1) \quad \psi_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots \mathbf{R}_z) \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp [i\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r}] ,$$

where ψ_n is the wavefunction of the nucleus in its ground state, and $\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp [i\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r}]$ the wave function of a free μ -meson (the impinging one) of wave vector

$$\mathbf{K}_0 = \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} ,$$

normalized to 1 meson in all the volume Ω containing our system.

(8) H. BETHE: *Ann. der Phys.*, **5**, 325 (1930).

We have to calculate the matrix element

$$(2) \quad H_{nm} = \int \psi_n^* \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp[-i\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r}] U \psi_m \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp[i\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r}] dv_1 dv_2 \dots dv_s dV,$$

corresponding to the transition of the nucleus from its ground state n to the state m and the contemporary scattering of the μ -meson which, after the collision, will have the wave vector \mathbf{K} .

U is the interaction between the μ -meson and the Z protons present in the nucleus which, under our assumption, can be put in the form

$$(3) \quad U = \sum_i^Z U_i = e^2 \sum_i^Z u_i,$$

$$(4) \quad u_i = \frac{1}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}|} \exp\left[-\frac{r}{A}\right] \quad \text{for } |\mathbf{R}_i - \mathbf{r}| > r_0.$$

r_0 is the radius of the protons; $A = a_0 Z^{-1}$ (a_0 = radius of the first Bohr orbit of hydrogen) is the radius of the orbit of the K -electrons which is much larger than the nuclear radius R_0 . The exponential factor has been introduced in (4) in order to take into account the effect of the screening of the orbital electrons. As it is well known, this effect provides to keep finite the differential scattering cross-section in the forward direction.

According to the «one particle model», the wave-function of the nucleus in its state m , can be put in the form

$$(5) \quad \psi_m(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots \mathbf{R}_Z) = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{m_1}(\mathbf{R}_1) & \psi_{\bar{m}_2}(\mathbf{R}_1) & \dots & \psi_{m_Z}(\mathbf{R}_1) \\ \psi_{m_1}(\mathbf{R}_2) & \psi_{m_2}(\mathbf{R}_2) & \dots & \psi_{m_Z}(\mathbf{R}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{m_1}(\mathbf{R}_Z) & \psi_{m_2}(\mathbf{R}_Z) & \dots & \psi_{m_Z}(\mathbf{R}_Z) \end{vmatrix}$$

where the $\psi_{m_k}(\mathbf{R}_k)$ are the wave function of the single proton in the potential well representing the action of the other $Z - 1$ protons and all the neutrons in the nucleus.

Introducing (3), (4) and (5) in (2) and taking into account the well known results of the wavemechanical treatment of many body problems⁽⁹⁾ we get

$$(6) \quad H_{nm} = \sum_i^Z H_{n_i m_i},$$

$$(7) \quad H_{n_i m_i} = \int \psi_{n_i}^*(\mathbf{R}_i) \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp[-i\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r}] U_i \psi_m(\mathbf{R}_i) \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp[i\mathbf{K} \times \mathbf{r}] dv_i dV.$$

⁽⁹⁾ See, for instance, P. GOMBAS: *Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchen-Problems der Wellenmechanik* (Verlag Birkhäuser, Basel, 1950), pag. 80-83.

From (6) we see the well known fact that, in this approximation in a collision between the μ -meson and a nucleus only one proton can be excited.

In order to calculate the matrix element (7) (which we will write in the following dropping the index i) we put

$$(8) \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp[-i\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r}] \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp[i\mathbf{K} \times \mathbf{r}] = \frac{1}{\Omega} \exp[i\mathbf{k} \times \mathbf{r}],$$

where

$$(9) \quad \mathbf{k} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0,$$

and

$$(10) \quad V_{nm}(\mathbf{r}) = \int \psi_n^*(\mathbf{R}) U(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{R}) dV.$$

From (8) follows

$$(11) \quad \Delta_2 \Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}^2 \Phi(\mathbf{r}),$$

so that, applying Green's theorem, we have

$$(12) \quad H_{nm} = \int V_{nm}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dv = -\frac{1}{k^2} \int V_{nm}(\mathbf{r}) \Delta_2 \Phi(\mathbf{r}) dv = \\ = -\frac{1}{k^2} \int \Phi(\mathbf{r}) \Delta_2 V_{nm}(\mathbf{r}) dv - \frac{1}{k^2} \int \{ V_{nm} \text{grad } \Phi - \Phi \text{grad } V_{nm} \} ds,$$

which reduces to

$$(13) \quad H_{nm} = -\frac{1}{k^2} \int \Phi(\mathbf{r}) \Delta_2 V_{nm}(\mathbf{r}) dv,$$

provided $V_{nm}(\mathbf{r})$ goes to zero, when \mathbf{r} goes to infinity, at least as $1/r^2$. From (10) and (4) we see that such a condition is satisfied on account of the exponential factor due to the screening of the orbital electrons.

In order to avoid unnecessary complications, in the following we will consider the exponential factor appearing in (4) as constant and equal to 1. Such a procedure (corresponding to the limiting case $A \rightarrow \infty$) is justified by the fact that $\exp[-r/A]$ does not vary appreciably in the region where the $\psi_n(\mathbf{R})$ are different from zero so that it will affect only the scattering at very small angles while we are interested in the medium and large angle regions.

From (10) it follows

$$(14) \quad \Delta_2 V_{nm}(\mathbf{r}) = \int \psi_n^*(\mathbf{R}) \psi_m(\mathbf{R}) \Delta_2 U(\mathbf{R} - \mathbf{r}) dV,$$

which can be easily calculated once we do some assumption about the spacial charge distribution of the proton; in fact we have

$$(15) \quad \Delta u = -4\pi\rho,$$

where ρ is the charge density of the proton normalized to 1

$$(16) \quad \int \rho \, dv = 1.$$

If we assume that the proton is a point-charge we have

$$(17) \quad \rho = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \quad \text{cm}^{-3},$$

which, combined with (15) and (14), gives

$$(18) \quad \Delta_2 V_{nm}(\mathbf{r}) = -4\pi e^2 \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}).$$

Introducing (18) in (13) we have our final result

$$(19) \quad H_{nm} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \Phi(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) \, dv$$

which holds for *point-charge protons*.

Before specifying the wavefunction in (19), we will recall that the differential cross section $d\sigma_{nm}/d\omega$ corresponding to the transition $n, \mathbf{K}_0 \rightarrow m, \mathbf{K}$ is connected to the matrix element (2) by the well known relation ⁽¹⁰⁾

$$(20) \quad \frac{1}{\Omega} \frac{p_0}{m} \frac{d\sigma_{nm}}{d\omega} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E) |H_{nm}|^2,$$

with $m = \mu/\sqrt{1-\beta^2}$ (μ = rest mass of μ -mesons); the factor $1/\Omega$ represents the number of μ -mesons per unit of volume

$$(21) \quad \rho(E) \, dE \, d\omega = \Omega \frac{pE}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \, dE \, d\omega,$$

is the number of final states of our system belonging to the energy interval dE and to the solid angle $d\omega$.

In (20) $\rho(E)$ must be calculated for that value of E that satisfies the conservation of energy.

3. - Case of the "parabolic-well model".

If we assume for the potential-well a parabolic shape, the wave function of the state m will split in the product of the wavefunction of three harmonic oscillators

$$(22) \quad \psi_n(\mathbf{R}) = \varphi_{m_1}(\xi) \varphi_{m_2}(\eta) \varphi_{m_3}(\zeta),$$

⁽¹⁰⁾ See, for instance, W. HEITLER: *Quantum Theory of radiation*, pag. 82 and 90.

where

$$(23) \quad \varphi_{m_1}(\xi) = [\pi^{1/2} a \cdot 2^{m_1} m_1!]^{-1/2} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] H_{m_1}(\xi); \quad \xi = \frac{X}{a},$$

$$(24) \quad a = \left(\frac{\hbar^2}{M_p w}\right)^{1/2},$$

$H_m(\xi)$ is a Hermite's polynomial, $w = \hbar\nu$ the energy interval between two successive quantum states of the bound proton, which is connected with the energy levels of the state m by the relations

$$(25) \quad \varepsilon_m = w\left(m + \frac{1}{2}\right),$$

$$(26) \quad m = m_1 + m_2 + m_3 + 1.$$

The state m is degenerated $m(m+1)$ times as can be seen from table I where we give the quantum numbers of the first few proton shells.

TABLE I.

Quantic numbers				Statistical weight $m(m+1)$	$Z <$
m_1	m_2	m_3	m		
0	0	0	1	2	2
1	0	0	2	6	8
0	1	0			
0	0	1			
2	0	0			
0	2	0	3	12	20
0	0	2			
1	1	0			
1	0	1			
0	1	1	4	20	40
3	0	0			
0	3	0			
0	0	3			
2	1	0	4	20	40
2	0	1			
1	2	0			
0	2	1			
1	0	2	4	20	40
0	1	2			
1	1	1	4	20	40

The length a , which determines completely the model, has been chosen so that the mean value of the square of the distance of the last proton from the center of gravity of the nucleus, is equal to the square of the empirical radius. This, for medium and heavy nuclei, is given by

$$(27) \quad R_0 = 1,4 \cdot 10^{-13} A^{1/3} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_0 c^2} A^{1/3},$$

expression that we will use also for very light elements.

Now we have

$$\overline{R^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = 3\overline{x^2} = 3a^2 \overline{\xi^2},$$

$$\overline{\xi^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\xi^2] H_{m_1}^2(\xi) \xi^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\xi^2] H_{m_1}^2(\xi) d\xi} = \frac{2\overline{m_1} + 1}{2}; \quad \overline{m_1} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = \frac{m-1}{3},$$

which, combined together, give

$$(28) \quad \overline{R^2} = \frac{2m+1}{2} a^2;$$

here m is the total quantum number of the last proton. From (27) and (28) we have finally

$$(29) \quad a = \frac{e^2}{m_0 c^2} \frac{A^{1/3}}{\sqrt{2(2m+1)}}.$$

In Table II we give the values of a and

$$(30) \quad w = \frac{2m+1}{A^{2/3}} \left(\frac{\hbar c}{e^2} \right)^2 \frac{m_0}{M_p} m_0 c^2 = \frac{2m+1}{A^{2/3}} \cdot 10,4 \text{ MeV},$$

for a few examples, in which we have included also Fe although, according to HEISENBERG ⁽³⁾, the parabolic-well model gives a reasonable representation of the nucleus only for $Z < 20$.

TABLE II.

Z	Element	A	m	$a \cdot 10^{13} \text{ cm}$	$w \text{ MeV}$
3	Li	6,94	2	1,7	14,3
6	C	12,00	2	2,04	9,9
13	Al	26,97	3	2,25	8,1
26	Fe	55,84	4	2,63	6,15

Before introducing the wave functions (22), (23) in (19), it is convenient to choose the orientation of the x axis in the direction of the vector \mathbf{k} , defined by (9).

The same results could be obtained by choosing the x -axis, for instance, in the direction of the motion of the impinging μ -meson. However if the coordinate x is taken in the direction of \mathbf{k} , the plane wave appearing in (19) reduces to

$$(31) \quad \Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{\Omega} \exp [iQ\xi],$$

with

$$(32) \quad Q = ka,$$

and the element turns out to be simply

$$(33) \quad H_{nm} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{1}{\Omega} I_{n_1 m_1}$$

with the selection rules

$$(34) \quad m_2 = n_2, \quad m_3 = n_3,$$

and

$$(35) \quad I_{n_1 m_1} = a \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n_1}(\xi) \varphi_{m_1}(\xi) \exp [iQ\xi] d\xi.$$

The integral (35) is known; it appears, for instance, in the theory of the diffraction of slow neutrons by crystals ⁽¹¹⁾:

$$(36) \quad \begin{cases} I_{n_1 m_1} = (-1)^{(m_1 - n_1)/2} \Phi_{m_1}^{(m_1 - n_1)} \left(\frac{Q^2}{2} \right) \\ \Phi_{m_1}^{(m_1 - n_1)}(x) = \frac{[n_1!]^{1/2}}{[m_1!]^{3/2}} \exp \left[-\frac{x}{2} \right] x^{(m_1 - n_1)/2} \frac{d^{(m_1 - n_1)}}{dx^{(m_1 - n_1)}} L_{m_1}(x), \end{cases}$$

where $L_m(x)$ is a Laguerre polynomial

$$(37) \quad L_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \frac{[m(m-1) \dots (m-k+1)]^2}{k!} x^{m-k}.$$

⁽¹¹⁾ W. PAULI and M. FIERZ: *Nuovo Cimento*, **6**, 167 (1938); R. J. FILKENSTEIN: *Phys. Rev.*, **72**, 907 (1947). We thank Dr. S. GALLONE for having called our attention on this paper.

4. - The coherent scattering.

In order to get the coherent scattering cross section we have to sum, according to (6), the matrix element (33), calculated for $m_1 = n_1$, over all the protons present in the nucleus, and introduce it in (20).

Considering that, in this case, $|\mathbf{K}_0| = |\mathbf{K}|$ so that

$$(38) \quad k = k_0 = |\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}| = \frac{|\Delta \mathbf{p}_0|}{\hbar} = \frac{2p_0 \sin \vartheta/2}{\hbar} = \frac{2 \sin \vartheta/2}{\lambda},$$

we have

$$(39) \quad \frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left(\frac{m_0 c^2 E_0}{(cp_0)^2} \right)^2 \frac{Z^2}{\sin^4 \vartheta/2} F^2 \left(\frac{Q_0^2}{2} \right),$$

where

$$(40) \quad F \left(\frac{Q_0^2}{2} \right) = \frac{1}{Z} \sum I_{n_1 n_1}$$

and

$$(41) \quad Q_0 = ak_0 = \frac{2a}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Now it is convenient to express the nuclear-form-factor (40) by introducing the numbers of protons present in the first shell, in the second shell, ... z_1, z_2, \dots . Then we have

$$(42) \quad F = \frac{1}{Z} \{ z_1 f_1 + z_2 f_2 + z_3 f_3 + \dots \},$$

where

$$(43) \quad \begin{cases} f_1 = I_{00}, & f_2 = \frac{1}{6} [2I_{11} + 4I_{00}], \\ f_3 = \frac{1}{12} [2I_{22} + 4I_{11} + 6I_{00}], & f_4 = \frac{1}{20} [2I_{33} + 4I_{22} + 6I_{11} + 8I_{00}], \end{cases}$$

$$Z = z_1 + z_2 + z_3 + \dots, \quad z_1 \leq 2; \quad z_2 \leq 6; \quad z_3 \leq 12; \quad z_4 \leq 20,$$

as it follows from the statistical weights of the single states in our model (Table I).

For $m_1 = n_1$, (36) and (37) give

$$I_{n_1 n_1} = \frac{1}{n_1!} \exp \left[-\frac{x}{2} \right] L_{n_1}(x), \quad x = \frac{Q_0^2}{2},$$

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = 1 - x; \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2;$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6;$$

and therefore

$$(44) \quad \begin{cases} f_1 = \exp\left[-\frac{x}{2}\right], & f_2 = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - \frac{1}{3}x\right), \\ f_3 = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}x^2\right), & f_4 = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{60}x^3\right), \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{\exp[-x/2]}{Z} \left\{ z_1 + z_2 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) + z_3 \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}x^2\right) + \right. \\ \left. + z_4 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{60}x^3\right) \right\}.$$

As examples we consider Li, C, Al, Fe:

$$\text{Li} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = z_4 = 0;$$

$$F(x) = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - \frac{1}{9}x\right);$$

$$\text{C} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 4; \quad z_3 = z_4 = 0;$$

$$F(x) = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - \frac{2}{9}x\right);$$

$$\text{Al} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 6; \quad z_3 = 5; \quad z_4 = 0;$$

$$F(x) = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - \frac{16}{13}x + \frac{5}{13}x^2\right);$$

$$\text{Fe} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 6; \quad z_3 = 12; \quad z_4 = 6;$$

$$F(x) = \exp\left[-\frac{x}{2}\right]\left(1 - \frac{16}{26}x + \frac{5}{26}x^2 - \frac{1}{26}x^3\right).$$

If in (44) we neglect all terms containing x^2, x^3, \dots , $F(x)$ reduces to

$$(45) \quad F(x) = 1 - 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{z_2 + 2z_3 + 3z_4}{3Z} \right] \frac{a^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

which has to be compared with WILLIAMS' result

$$(46) \quad F(x) = \frac{1}{1 + \frac{6^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \approx 1 - \frac{b^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

b is a length representing the dimensions (not better defined) of the nucleus. These two expressions are identical if

$$(47) \quad a \sqrt{2 \left[\frac{1}{2} + \frac{z_2 + 2z_3 + 3z_4}{3Z} \right]} = b.$$

From the data of Table III we see that according to (47) b must be smaller than R_0 for about 30 %.

TABLE III.

Element	$\sqrt{2 \left[\frac{1}{2} + \frac{z_2 + 2z_3 + 3z_4}{3Z} \right]}$	$b \cdot 10^{13} \text{ cm}$	$R_0 \cdot 10^{13} \text{ cm}$
Li	$\sqrt{11/9}$	1,87	2,67
C	$\sqrt{13/9}$	2,45	3,21
Al	$\sqrt{71/39}$	3,04	4,2
Fe	$\sqrt{87/39}$	3,95	5,35

5. - The incoherent scattering.

In order to get the incoherent scattering cross section $d\sigma_i/d\omega$ we have to introduce in equation (20) the matrix element corresponding to the transition $n_1 \rightarrow m_1$ ($n_1 \neq m_1$) and after that sum over all the final states m which are free, and over all the initial states n which are occupied by protons.

From equations (20) and (33) we get for the transition $n \rightarrow m$

$$(48) \quad \frac{d\sigma_{nm}}{d\omega} = \frac{4e^4 E_0}{c^4} \frac{Ep}{p_0 (\Delta p)^4} |I_{n_1 m_1}|^2,$$

E , p and Δp must satisfy the conservation of energy (but not the conservation of momentum to which provides the recoil of the nucleus) i.e.

$$(49) \quad E_0 - E = w(m - n) = E_0 y,$$

with

$$(50) \quad y = (m - n)\eta = (m - n) \frac{w}{E_0}.$$

Using (49) and the relations

$$E^2 = c^2(p^2 + \mu^2 c^2); \quad E_0^2 = c^2(p_0^2 + \mu^2 c^2),$$

we find

$$(51) \quad p^2 = p_0^2 - \frac{E_0^2}{c^2} y(2 - y) = p_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\beta_0^2} y(2 - y) \right\}.$$

If we call

$$(52) \quad \varphi(y) = \left\{ 1 - \frac{1}{\beta_0^2} y(2-y) \right\}^{1/2},$$

we have

$$(53) \quad p = p_0 \varphi(y),$$

and

$$\Delta p = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos \vartheta,$$

can be written in the form

$$(54) \quad \Delta p^2 = p_0^2 \{ 1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta \}.$$

Finally we have, from (49), (53) and (54)

$$(55) \quad \frac{Ep}{(\Delta p)^4} = \frac{E_0}{p_0^3} \frac{(1-y)\varphi(y)}{\{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}^2},$$

where, according to (50), y is proportional to $m-n = m_1 - n_1$ (see the selection rules (34)).

From (48) and (55) we obtain the differential cross section for inelastic scattering

$$(56) \quad \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left[\frac{m_0 c^2 E_0}{(c p_0)^2} \right]^2 \frac{Z}{\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} \Pi,$$

with

$$(57) \quad \Pi = \frac{1}{Z} \sum \alpha_{m_1-n_1} |I_{n_1 m_1}|^2,$$

$$(58) \quad \alpha_{m_1-n_1} = 16 \text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2} \frac{(1-y)\varphi(y)}{\{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}^2}.$$

From (36) and (37) we have

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} |I_{n_1 m_1}|^2 &= \exp[-x] P_{n_1 m_1}(x), \\ P_{0m} &= \frac{1}{m!} x^m; \quad P_{1m}(x) = \frac{1}{m!} \{ x^{m+1} - 2mx^m + m^2 x^{m-1} \}; \\ P_{2m} &= \frac{1}{m!} \left\{ \frac{1}{2} x^{m+2} - 2mx^{m+1} + m(3m-1)x^m - 2m^2(m-1)x^{m-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2(m-1)^2}{2} x^{m-2} \right\}; \\ P_{3m} &= \frac{1}{m!} \left\{ \frac{1}{3!} x^{m+3} - mx^{m+2} + m \left(\frac{5}{2} m - 1 \right) x^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - 2m(m-1)(2m-1)x^m + \frac{3}{2} m^2(m-1)(3m-5)x^{m-1} - \right. \\ &\quad \left. - 3m^2(m-1)^2(m-2)x^{m-2} + \frac{3}{2} m^2(m-1)^2(m-2)^2 x^{m-3} \right\}, \end{aligned} \right.$$

with

$$(61) \quad x = \frac{Q^2}{2} = \frac{a^2 k^2}{2} = \frac{a^2 \Delta p^2}{2\hbar^2} = \frac{a^2}{2\hbar^2} p_0^2 \{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\} = \frac{a^2}{2\lambda^2} \{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}.$$

The sum in (57) must extend over all final free states m and over all initial states, which are occupied by protons. If we call

$$(62) \quad A_{nm} = \alpha_{m-n} |I_{nm}|^2,$$

we get, from the inspection of Table I, the following results:

First shell: $n = 1$

$$\sum A_{nm} = z_1 \left\{ \sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{z_2}{6} A_{01} - \frac{z_3}{12} A_{02} - \frac{z_4}{20} A_{03} - \frac{z_5}{30} A_{04} - \dots \right\}.$$

Second shell: $n = 2$

$$(63) \quad \sum A_{nm} = z_2 \left\{ \frac{2}{3} \left[\sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{z_3}{12} A_{01} - \frac{z_4}{20} A_{02} - \dots \right] + \frac{1}{3} \left[\sum_2^{\infty} A_{1i} - \frac{z_3}{12} A_{12} - \frac{z_4}{20} A_{13} - \dots \right] \right\}$$

Third shell: $n = 3$

$$\sum A_{nm} = z_3 \left\{ \frac{3}{6} \left[\sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{z_4}{20} A_{01} - \frac{z_5}{30} A_{02} - \dots \right] + \frac{2}{6} \left[\sum_2^{\infty} A_{1i} - \frac{z_4}{20} A_{12} - \frac{z_5}{30} A_{13} - \dots \right] + \frac{1}{6} \left[\sum_3^{\infty} A_{2i} - \frac{z_4}{20} A_{23} - \frac{z_5}{30} A_{24} - \dots \right] \right\}.$$

Forth shell: $n = 4$

$$\sum A_{nm} = z_4 \left\{ \frac{4}{10} \left[\sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{z_5}{30} A_{01} - \dots \right] + \frac{3}{10} \left[\sum_2^{\infty} A_{1i} - \frac{z_5}{30} A_{12} - \dots \right] + \frac{2}{10} \left[\sum_3^{\infty} A_{2i} - \frac{z_5}{30} A_{23} - \dots \right] + \frac{1}{10} \left[\sum_4^{\infty} A_{3i} - \frac{z_5}{30} A_{34} - \dots \right] \right\}.$$

Applying these relations to the elements considered at the end of section 3 we find

$$\text{Li} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = 0; \quad z_4 = 0;$$

$$\Pi = \frac{8}{9} \sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{1}{9} A_{01} + \frac{1}{9} \sum_2^{\infty} A_{1i};$$

$$\text{C} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 4; \quad z_3 = 0; \quad z_4 = 0;$$

$$\Pi = \frac{7}{9} \sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{2}{9} A_{01} + \frac{2}{9} \sum_2^{\infty} A_{1i};$$

$$\text{Al} \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 6; \quad z_3 = 5; \quad z_4 = 0;$$

$$\Pi = \frac{51}{78} \sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{11}{39} A_{01} - \frac{5}{78} A_{02} + \frac{11}{39} \sum_2^{\infty} A_{1i} - \frac{5}{78} A_{12} + \frac{5}{78} \sum_3^{\infty} A_{2i} ;$$

$$\text{Fe} \quad z_2 = 2 ; \quad z_2 = 6 ; \quad z_3 = 12 ; \quad z_4 = 6 ;$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{36}{65} \sum_1^{\infty} A_{0i} - \frac{3}{10} A_{01} - \frac{8}{65} A_{02} - \frac{3}{130} A_{03} + \frac{3}{10} \sum_2^{\infty} A_{1i} - \frac{8}{65} A_{12} - \frac{3}{130} A_{13} + \\ & + \frac{8}{65} \sum_3^{\infty} A_{2i} - \frac{3}{130} A_{23} + \frac{3}{130} \sum_4^{\infty} A_{3i} . \end{aligned}$$

6. - The case of the "Gaussian proton".

In the preceding sections we have assumed that the proton is a point-charge. In this section we will discuss the modifications that we have to introduce in the expressions (39) and (56) of the scattering cross sections in order to take into account the finite dimensions of the region where the electric charge of the proton is distributed.

No information is available today about this point, and still less, if possible, about the law according to which the charge e is distributed inside this volume.

Therefore we will do the reasonable work assumption that the charge density ρ defined by (15) and (16) is a gaussian function, i.e. we put

$$(65) \quad \rho(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \frac{1}{\pi^{3/2} r_0^3} \exp \left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{r_0^2} \right] .$$

Introducing this expression in (15) and (15) in (14) we get

$$(66) \quad \Delta_2 V_{nm}(\mathbf{r}) = \frac{4e^2}{\pi^{1/2} r_0^3} \int \psi_n^*(\mathbf{R}) \psi_m(\mathbf{R}) \exp \left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{r_0^2} \right] dV .$$

If we change now variables and instead of \mathbf{r} and \mathbf{R} , we use \mathbf{r} and

$$(67) \quad \mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r} ,$$

we have

$$(68) \quad \Delta_2 V_{nm}(\mathbf{r}) = \frac{4e^2}{\pi^{1/2} r_0^3} \int \psi_n^*(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \psi_m(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \exp \left[-\frac{u^2}{r_0^2} \right] du_x du_y du_z ,$$

where u_x, u_y, u_z are the components of the vector (67).

We call now, only for sake of simplicity,

$$(69) \quad \chi(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = \psi_n^*(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \psi_m(\mathbf{r} + \mathbf{u}) ,$$

and we develop this function in series of powers of u_x, u_y, u_z ,

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = & \chi(\mathbf{r}) + \frac{\partial \chi}{\partial x} u_x + \frac{\partial \chi}{\partial y} u_y + \frac{\partial \chi}{\partial z} u_z + \\ & + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} u_x^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} u_x u_y \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \frac{\partial^3 \chi}{\partial x^3} u_x^3 + \dots \right\} + \\ & + \frac{1}{4!} \left\{ \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} u_x^4 + \dots + 6 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} u_x^2 u_y^2 + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Introducing this expression in the integral of (68) and noting that the even integrals are

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^{2r} \exp \left[-\frac{u_x^2}{r_0^2} \right] du_x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2^r} \sqrt{\pi} (r_0)^{2r+1},$$

while the odd integrals are zero, we get

$$\begin{aligned}\int \chi(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \exp \left[-\frac{u^2}{r_0^2} \right] du_x du_y du_z = & \chi(\mathbf{r}) (\sqrt{\pi} r_0)^3 + \\ & + \frac{1}{2!} (\sqrt{\pi} r_0)^2 \frac{1}{2} r_0^3 \sqrt{\pi} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right\} + \\ & + \frac{1}{4!} \left\{ \sqrt{\pi} r_0 \right\}^2 \frac{1 \cdot 3}{4} \cdot \sqrt{\pi} r_0^5 \left[\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} \right] + \\ & + 6 (\sqrt{\pi} r_0) \left(\frac{1}{2} r_0^3 \sqrt{\pi} \right)^2 \left[\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^2 \partial z^2} \right] \left\{ \right\}.\end{aligned}$$

If now we substitute this expression in (68) and (68) in (13) we have to calculate many integrals of the following type

$$\int \frac{\partial^n \chi(\mathbf{r})}{\partial x^n} \exp [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}] dx dy dz,$$

which, with n partial integrations, give

$$(70) \quad (-ik_x)^n \int \chi(\mathbf{r}) \exp [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}] dv,$$

provided the function $\chi(\mathbf{r})$ and all its derivatives go to zero when \mathbf{r} goes to infinity. From (69) we see that such a condition is always satisfied provided at least one of the two wave-functions satisfies such a condition; this is certainly true for the wave-function of the proton in its initial state.

From (69) and (70) we get

$$\begin{aligned} & \int \exp [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}] dv \int \chi(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \exp \left[-\frac{u^2}{r_0^2} \right] dV = \int \chi(\mathbf{r}) \exp [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}] dv \times \\ & \quad \times \pi^{1/2} r_0^3 \left\{ 1 + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} r_0^2 [(-ik_x)^2 + (-ik_y)^2 + (-ik_z)^2] + \right. \\ & \quad + \frac{1}{4!} \left[r_0^4 \frac{1 \cdot 3}{4} \{ (-ik_x)^4 + (-ik_y)^4 + (-ik_z)^4 \} + \right. \\ & \quad + \frac{6}{4} r_0^4 \{ (-ik_x)^2 (-ik_y)^2 + (-ik_x)^2 (-ik_z)^2 + (-ik_y)^2 (-ik_z)^2 \} \left. \right\} = \\ & = \int \chi(\mathbf{r}) \exp [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}] dv \pi^{1/2} r_0^3 \left\{ 1 + \left(-\frac{ikr_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2!} \left(-\frac{ikr_0}{2} \right)^4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Considering the constant factor that we have neglected in (68) and (13) and the expression (19) for the matrix element H_{nm} for the point-charge proton, we can conclude that the corresponding matrix element $H_{nm}^{(g)}$ for the gaussian proton is given by

$$(71) \quad H_{nm}^{(g)} = TH_{nm},$$

where

$$(72) \quad T = \exp \left[-\frac{q^2}{4} \right],$$

$$(73) \quad q = kr_0,$$

is a kind of proton-form-factor.

Once we know how to deduce the matrix element for a gaussian proton from the matrix element for a point-charge proton, it is obvious how we have to change the corresponding cross sections which are proportional to the square of the matrix elements. For the coherent scattering we must simply introduce a factor

$$T_0^2 = \exp \left[-\frac{q_0^2}{2} \right],$$

while for the incoherent scattering we have to calculate, for each transition, the corresponding factor

$$T^2 = \exp \left[-\frac{q^2}{2} \right],$$

here the exponent of e is given by an expression similar to (61) with r_0 in place of a .

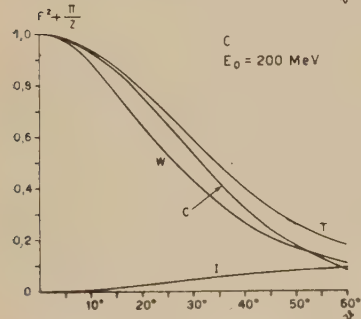
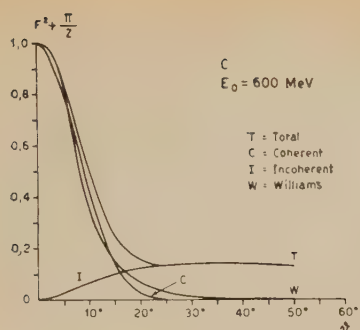


Fig. 1.

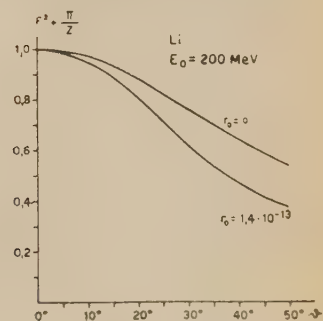
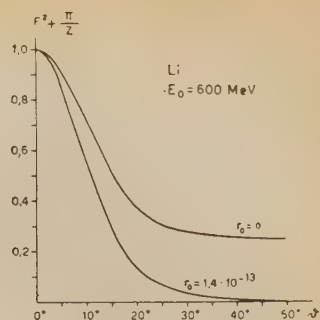


Fig. 2.

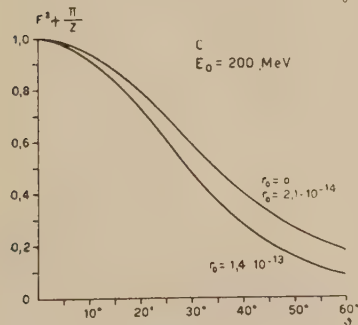
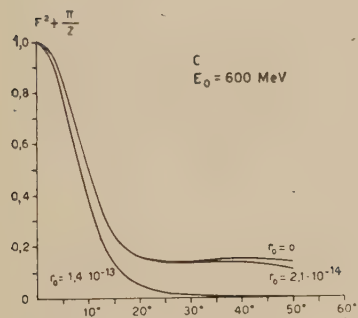


Fig. 3.

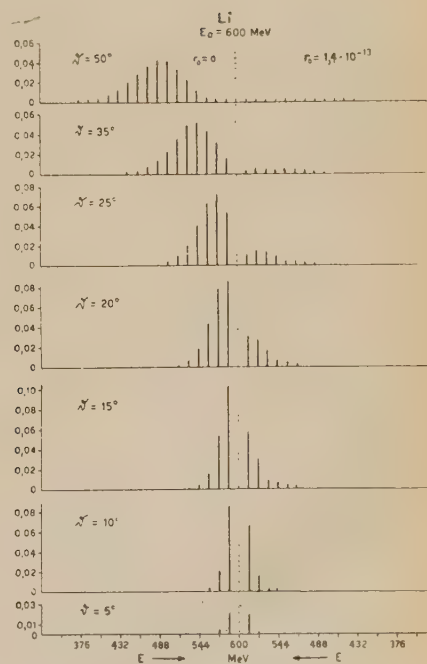


Fig. 4.

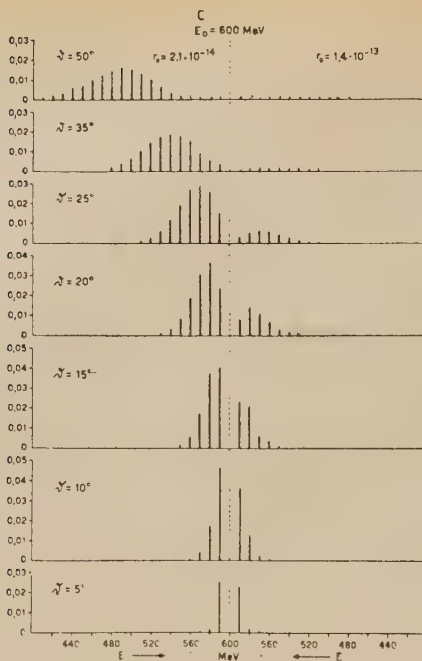


Fig. 5.

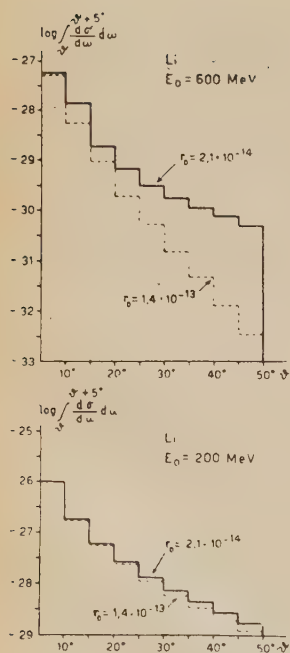


Fig. 6.

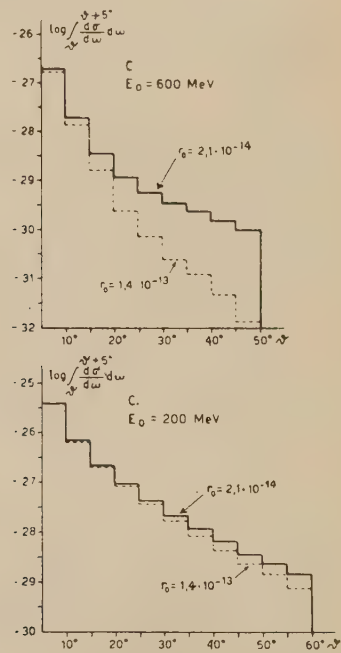


Fig. 7.

7. - Numerical examples.

Our problem has been treated in the center of gravity system of the μ -meson and the nucleus. One can easily show that such a system is practically identical with the laboratory system. For instance, in the case of a μ -meson of 600 MeV total energy, colliding with a Li nucleus, the β^2 of the center of gravity in the laboratory system is only $6,7 \cdot 10^{-3}$ and therefore it can be neglected with respect to one. In all other cases considered in the present paper, the error introduced by identifying the center of gravity system with the laboratory system will be still smaller.

Numerical calculation for Li and C nuclei and for energies of the impinging μ -mesons equal to 200, 400 and 600 MeV have been performed using the equations derived in the preceding sections.

In fig. 1 we give $F^2 + \Pi/Z$ for C and for $r_0 = 0$, $E_0 = 200$ MeV and 600 MeV; curves marked C, I and T represent respectively the coherent, the incoherent and the total scattering. For comparison we give also Williams' factor calculated, as usually, for $b = R_0$.

In fig. 2 and 3 we give $F^2 + \Pi/Z$ for Li and C for different values of r_0 and for $E_0 = 200$ and 600 MeV. Fig. 4 and 5 represent the energy-spectra of the incoherently scattered mesons, by Li and C for two values of r_0 at different angles for an initial energy E_0 of 600 MeV: namely the data given in these figures are the terms of the sum of equation (57).

In Table IV we give the differential cross section according to equations (39), (56) for two different values of the electromagnetic radius of the protons. The point at $\vartheta = 0$ has been calculated taking into account the screening of the electrons ⁽²⁾.

TABLE IV-a. - *Lithium*.

ϑ	$E = 200 \text{ MeV}$		$E = 600 \text{ MeV}$	
	$r = 0$	$r = 1,4 \cdot 10^{-13}$	$r = 0$	$r = 1,4 \cdot 10^{-13}$
$d\sigma/d\omega$ in cm^2				
0°	$1,90 \cdot 10^{-12}$	$1,90 \cdot 10^{-12}$	$1,59 \cdot 10^{-11}$	$1,59 \cdot 10^{-11}$
5°	$5,72 \cdot 10^{-25}$	$5,68 \cdot 10^{-25}$	$3,41 \cdot 10^{-26}$	$3,20 \cdot 10^{-26}$
10°	$3,48 \cdot 10^{-26}$	$3,41 \cdot 10^{-26}$	$1,70 \cdot 10^{-27}$	$1,31 \cdot 10^{-27}$
15°	$6,74 \cdot 10^{-27}$	$6,40 \cdot 10^{-27}$	$2,43 \cdot 10^{-28}$	$1,35 \cdot 10^{-28}$
20°	$2,03 \cdot 10^{-27}$	$1,84 \cdot 10^{-27}$	$5,60 \cdot 10^{-29}$	$1,96 \cdot 10^{-29}$
25°	$7,86 \cdot 10^{-28}$	$6,82 \cdot 10^{-28}$	$1,89 \cdot 10^{-29}$	$3,78 \cdot 10^{-30}$
35°	$1,82 \cdot 10^{-28}$	$1,38 \cdot 10^{-28}$	$4,49 \cdot 10^{-30}$	$2,34 \cdot 10^{-31}$
50°	$3,56 \cdot 10^{-29}$	$2,47 \cdot 10^{-29}$	$1,09 \cdot 10^{-30}$	$1,28 \cdot 10^{-32}$

TABLE IV-b. - Carbon.

ϑ	$E = 200 \text{ MeV}$		$E = 600 \text{ MeV}$	
	$r = 2,1 \cdot 10^{-14}$	$r = 1,4 \cdot 10^{-13}$	$r = 2,1 \cdot 10^{-14}$	$r = 1,4 \cdot 10^{-13}$
	$d\sigma/d\omega \text{ in cm}^2$			
0°	$4,75 \cdot 10^{-13}$	$4,75 \cdot 10^{-13}$	$3,97 \cdot 10^{-12}$	$3,97 \cdot 10^{-12}$
5°	$2,26 \cdot 10^{-24}$	$2,25 \cdot 10^{-24}$	$1,27 \cdot 10^{-25}$	$1,19 \cdot 10^{-25}$
10°	$1,35 \cdot 10^{-25}$	$1,31 \cdot 10^{-25}$	$4,68 \cdot 10^{-27}$	$3,61 \cdot 10^{-27}$
15°	$2,51 \cdot 10^{-26}$	$2,39 \cdot 10^{-26}$	$4,59 \cdot 10^{-28}$	$2,57 \cdot 10^{-28}$
20°	$7,20 \cdot 10^{-27}$	$6,60 \cdot 10^{-27}$	$8,90 \cdot 10^{-29}$	$3,29 \cdot 10^{-29}$
25°	$2,63 \cdot 10^{-27}$	$1,58 \cdot 10^{-27}$	$2,30 \cdot 10^{-29}$	$4,81 \cdot 10^{-30}$
35°	$4,99 \cdot 10^{-28}$	$1,87 \cdot 10^{-28}$	$8,95 \cdot 10^{-30}$	$4,02 \cdot 10^{-31}$
40°	$2,41 \cdot 10^{-28}$	$1,71 \cdot 10^{-28}$	—	—
50°	$6,91 \cdot 10^{-29}$	$4,13 \cdot 10^{-29}$	$1,80 \cdot 10^{-30}$	$5 \cdot 10^{-33}$
60°	$2,42 \cdot 10^{-29}$	$1,21 \cdot 10^{-29}$	—	—

Finally the histograms representing the preceding cross sections integrated over angular intervals equal to 5° , are plotted in fig. 6 and 7.

The figures are selfexplanatory, and show that the scattering of μ -mesons by light nuclei is very sensitive to the value of the electromagnetic radius of the proton.

Our thanks are due to Prof. B. FERRETTI for many valuable discussions.

RIASSUNTO

Il problema dello sparpagliamento coulombiano dei mesoni da parte di un nucleo leggero viene trattato, in approssimazione di Born, rappresentando il nucleo con un modello a un solo corpuscolo. Come nel caso dello sparpagliamento dei raggi X o degli elettroni da parte di un atomo è necessario distinguere lo sparpagliamento coerente dallo sparpagliamento incoerente. Specificando il modello ad un sol corpuscolo come una buca parabolica, si deducono in maniera elementare, le espressioni delle corrispondenti sezioni d'urto. Quella relativa allo sparpagliamento coerente è una estensione della ben nota formula di Williams che può essere utile nel caso di mesoni μ la cui lunghezza d'onda λ risulti dello stesso ordine di grandezza della distanza dei protoni entro il nucleo. Oltre alle sezioni d'urto vengono dedotti anche gli spettri dei mesoni sparpagliati incoerentemente. In fine viene mostrato quale influenza possa avere sia sullo sparpagliamento coerente che su quello incoerente, l'esistenza di un valore finito del raggio elettromagnetico del protone.

Effetto di latitudine sulla componente nucleonica della radiazione cosmica.

P. CALDIROLA

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

G. ZIN

Istituto Elettrotecnico Nazionale « Galileo Ferraris » - Torino

(ricevuto il 19 Maggio 1950)

Riassunto. — Si esamina l'azione del campo magnetico terrestre sulla distribuzione della componente nucleonica (protonica e neutronica) della radiazione cosmica nell'atmosfera, partendo dall'ipotesi dell'esistenza al limite superiore dell'atmosfera di una componente primaria protonica dallo spettro energetico del tipo $P(E) = P_0 E^{-s}$ e basandosi su di un meccanismo per la produzione dei mesoni del tipo « plurimo » già adottato in un precedente lavoro.

1. — Introduzione.

In una Nota precedente ⁽¹⁾ uno di noi ha proposto uno schema di produzione dei mesoni in processi d'urto fra nucleoni che si è dimostrato capace di spiegare, nelle sue linee generali, il comportamento nell'atmosfera della componente nucleonica di elevata energia e di quella mesonica, da essa derivante, alle alte latitudini in corrispondenza delle quali si può ritenere trascurabile l'influenza dell'azione del taglio del campo magnetico terrestre sullo spettro della componente primaria protonica.

Vogliamo in questa Nota riprendere in esame lo schema allora proposto (generalizzandolo anzi in qualche punto) limitatamente allo scopo di studiare l'influenza del taglio magnetico terrestre sulla distribuzione nell'atmosfera della componente nucleonica (protonica e neutronica).

⁽¹⁾ P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949); in seguito citato con (I).

Assumeremo pertanto che i mesoni π (positivi, negativi e neutri) vengano generati nei processi d'urto fra nucleoni secondo il seguente schema:

$$\begin{aligned}
 P + P &= \begin{cases} P + N + \pi^+ & (\text{probabilità } \gamma) \\ P + P + \pi^0 & (\quad \gg \quad 1 - \gamma) \end{cases} \\
 N + N &= \begin{cases} P + N + \pi^- & (\text{probabilità } \gamma) \\ N + N + \pi^0 & (\quad \gg \quad 1 - \gamma) \end{cases} \\
 \left. \begin{matrix} P + N \\ N + P \end{matrix} \right\} &= \begin{cases} P + P + \pi^- & (\text{probabilità } \nu) \\ N + N + \pi^+ & (\quad \gg \quad \nu) \\ P + N + \pi^0 & (\quad \gg \quad 1 - 2\nu) . \end{cases}
 \end{aligned}$$

Basandosi sulle stesse ipotesi adottate in (I) per la ripartizione di energia fra mesone creato e nucleoni urtanti e usando anche le stesse notazioni, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_{<}}{dl} &= \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\frac{E}{\varepsilon}} p(E', l) dE' + (1 - \gamma)\nu \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} p(E', l) dE' + \\
 &\quad + [\gamma + (1 - \gamma)(1 - \nu)] \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} p(E', l) \frac{E}{\varepsilon E'} dE' , \\
 \frac{dP_{>}}{dl} &= [\gamma(1 - \gamma) + (1 - \gamma)\nu] \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} p(E', l) \frac{\varepsilon E' - E}{\varepsilon E'} dE' + \\
 &\quad + [(1 - \gamma)\gamma + \gamma] \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} n(E', l) \frac{\varepsilon E' - E}{\varepsilon E'} dE' ,
 \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_{<}}{dl} &= \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\frac{E}{\varepsilon}} n(E', l) dE' + \gamma\nu \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} n(E', l) dE' + \\
 &\quad + [(1 - \gamma) + \gamma(1 - \nu)] \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} n(E', l) \frac{E}{\varepsilon E'} dE' , \\
 \frac{dN_{>}}{dl} &= [(1 - \gamma)(1 - \gamma) + \gamma\nu] \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} n(E', l) \frac{\varepsilon E' - E}{\varepsilon E'} dE' + \\
 &\quad + [\gamma\gamma + (1 - \gamma)] \int_{\frac{E}{\varepsilon}}^{\infty} p(E', l) \frac{\varepsilon E' - E}{\varepsilon E'} dE' .
 \end{aligned}$$

Scrivendo poi le solite equazioni del bilancio si arriva, dopo una integrazione per parti, al seguente sistema di equazioni integro-differenziali:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial P(E, l)}{\partial l} &= P(E, l) - [1 + \eta(1 - \gamma)] \frac{E}{\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} P(E', l) \frac{1}{E'^2} dE' - \\ &\quad - [(1 - \eta)\gamma + \eta] \frac{E}{\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} N(E', l) \frac{1}{E'^2} dE', \\ -\frac{\partial N(E, l)}{\partial l} &= N(E, l) - [1 + (1 - \eta)(1 - \gamma)] \frac{E}{\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} N(E', l) \frac{1}{E'^2} dE' - \\ &\quad - [\eta\gamma + (1 - \eta)] \frac{E}{\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} P(E', l) \frac{1}{E'^2} dE', \end{aligned} \right.$$

da cui sommando si deduce che per la componente nucleonica totale vale sempre l'equazione:

$$(1^*) \quad -\frac{\partial H(E, l)}{\partial l} = H(E, l) - 2 \frac{E}{\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} H(E', l) \frac{1}{E'^2} dE'.$$

Detta ora E_φ l'energia di taglio del campo magnetico terrestre alla latitudine magnetica φ sulla componente primaria protonica (supporremo sempre E_φ maggiore dell'energia critica E_π per la produzione di mesoni), avremo come condizioni iniziali per l'integrazione del sistema (1) le seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} P(E, 0) = P_0 E_\varphi^{-s} & \text{per } 0 < E < E_\varphi, \\ P(E, 0) = P_0 E^{-s} & \text{per } E \geq E_\varphi, \end{cases} \quad N(E, 0) = 0 \quad \text{per } E > 0.$$

Queste condizioni determinano in maniera univoca le funzioni $P(E, l)$ e $N(E, l)$ che danno la distribuzione delle componenti nucleoniche nell'atmosfera.

2. - Integrazione del sistema di equazioni integro-differenziali.

Vogliamo ora procedere ad uno studio particolareggiato e alla integrazione esatta del sistema di equazioni (1), che determina la distribuzione delle componenti nucleoniche della radiazione cosmica nell'atmosfera, sotto le condizioni (2).

Assumendo al solito $\eta = 1/2$ (protoni e neutroni sono contenuti nei nuclei dell'atmosfera circa in egual numero), trascriviamo le equazioni da integrare

introducendo alcune ovvie semplificazioni nelle notazioni. Scriviamo pertanto il sistema integro-differenziale (1) sotto la forma

$$(1') \quad \begin{cases} -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = P(x, y) - \frac{ax}{\varepsilon} \int_{x/\varepsilon}^{\infty} P(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} - \frac{bx}{\varepsilon} \int_{x/\varepsilon}^{\infty} N(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}, \\ -\frac{\partial N(x, y)}{\partial y} = N(x, y) - \frac{ax}{\varepsilon} \int_{x/\varepsilon}^{\infty} N(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} - \frac{bx}{\varepsilon} \int_{x/\varepsilon}^{\infty} P(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}, \end{cases}$$

con le condizioni al contorno:

$$(2') \quad \begin{cases} P(x, 0) = P_0 x_0^{-s} & \text{per } 0 < x < x_0, \\ P(x, 0) = P_0 x^{-s} & \text{per } x \geq x_0, \end{cases} \quad N(x, 0) = 0 \quad \text{per } x \geq 0,$$

essendo $a, b, \varepsilon, s, x_0$ costanti reali positive con $\varepsilon \leq 1$. Le funzioni incognite $P(x, y)$ e $N(x, y)$ delle variabili x, y devono essere determinate nel semipiano $x > 0$.

Si ponga ora:

$$(3) \quad H(x, y) = P(x, y) + N(x, y), \quad K(x, y) = P(x, y) - N(x, y),$$

per cui:

$$P(x, y) = \frac{1}{2} [H(x, y) + K(x, y)], \quad N(x, y) = \frac{1}{2} [H(x, y) - K(x, y)].$$

Con tali posizioni sommando e sottraendo le (1') membro a membro si ottiene:

$$(4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = H(x, y) - \frac{(a+b)}{\varepsilon} x \int_{x/\varepsilon}^{\infty} H(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}, \\ -\frac{\partial K(x, y)}{\partial y} = K(x, y) - \frac{(a-b)}{\varepsilon} x \int_{x/\varepsilon}^{\infty} K(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}, \end{cases}$$

mentre le (2') forniscono le nuove condizioni al contorno:

$$(5) \quad \begin{cases} H(x, 0) = K(x, 0) = P_0 x_0^{-s} & (\text{per } 0 < x < x_0), \\ H(x, 0) = K(x, 0) = P_0 x^{-s} & (\text{per } x \geq x_0). \end{cases}$$

Manifestamente, all'integrazione del sistema (1') con le condizioni iniziali (2') si può sostituire, in forza delle (3), l'integrazione delle equazioni (4) con le condizioni al contorno (5). Tuttavia, per semplicità di scrittura, è opportuno porre:

$$(3') \quad \begin{cases} H_1(x, y) = H(x, y) = P(x, y) + N(x, y), & \sigma_1 = a + b, \\ H_2(x, y) = K(x, y) = P(x, y) - N(x, y), & \sigma_2 = a - b, \end{cases}$$

con che le (4) possono essere così raccolte:

$$(6) \quad \frac{\partial H_i(x, y)}{\partial y} + H_i(x, y) = \frac{\sigma_i x}{\varepsilon} \int_{x/\varepsilon}^{\infty} H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}, \quad (i = 1, 2)$$

con le condizioni al contorno:

$$(7) \quad \begin{aligned} H_i(x, 0) &= P_0 x_0^{-s} \quad (\text{per } 0 < x < x_0), \\ H_i(x, 0) &= P_0 x^{-s} \quad (\text{per } x \geq x_0), \end{aligned} \quad (i = 1, 2).$$

Per integrare le equazioni (6) con le condizioni al contorno (7) si farà ricorso alla trasformazione di Mellin

$$(8) \quad f(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \Phi(x) dx,$$

la quale, quando certe condizioni sono soddisfatte, è atta a trasformare una funzione $\Phi(x)$ definita per ogni $x > 0$ in un'altra funzione $f(p)$ definita in una striscia del piano della variabile complessa p . Detta striscia è notoriamente delimitata da due rette parallele all'asse immaginario. Siano β e γ ($\beta < \gamma$) le ascisse di tali rette.

Oltre alla striscia costituita dai punti del piano della variabile p in corrispondenza dei quali l'integrale (8) risulta convergente, la teoria della trasformazione di Mellin porta a considerare una seconda striscia, costituita dai punti del piano della p in corrispondenza dei quali l'integrale (8) converge assolutamente. Tale striscia, nell'ipotesi che esista, è pure delimitata da rette parallele all'asse immaginario. Dette β' e γ' le ascisse di tali rette ($\beta' < \gamma'$), manifestamente si ha $\beta \leq \beta'$ e $\gamma \geq \gamma'$.

L'inversione della (8) può essere effettuata sotto condizioni molto larghe ed è nota la relazione:

$$(8') \quad \frac{1}{2} [\Phi(x+0) + \Phi(x-0)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} x^{-p} f(p) dp, \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Questa vale per un punto di continuità o di discontinuità di 1ª specie della $\Phi(x)$. Il numero reale α può essere scelto ad arbitrio, purchè sia interno all'intervallo (β', γ') di convergenza assoluta. L'integrale (8') va inteso quale integrale principale nel senso di Cauchy. Per la validità della (8') si richiede, oltre la trasformabilità assoluta della $\Phi(x)$, anche qualche altra condizione, come ad esempio che la $\Phi(x)$ sia a variazione limitata nell'intorno di x .

Richiamate così sommariamente le proprietà della trasformazione di Mellin e della sua inversione, si considerino le trasformate

$$(9) \quad \mathcal{L}_i(p, y) = \int_0^{\infty} x^{p-1} H_i(x, y) dx, \quad (i = 1, 2),$$

delle funzioni incognite $H_i(x, y)$ che compaiono nelle equazioni (6) e che soddisfano alle condizioni al contorno (7). Inoltre si supponga che nel piano delle p esistano due striscie (β'_i, γ'_i) in corrispondenza dei cui punti gli integrali

$\int_0^{\infty} x^{p-1} H_i(x, y) dx$ converge assolutamente e il simbolo di integrale sia permutabile con quello di derivazione rispetto alla y , per cui si abbia:

$$(10) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_i(p, y)}{\partial y} = \int_0^{\infty} x^{p-1} \frac{\partial H_i(x, y)}{\partial y} dx. \quad (i = 1, 2).$$

Ciò posto si moltiplichino le equazioni (6) per x^{p-1} e si integrino nell'intervallo $(0, +\infty)$ della variabile x , tenendo presenti le posizioni (9) e (10). Si ottiene così:

$$(11) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_i(p, y)}{\partial y} + \mathcal{L}_i(p, y) = \frac{\sigma_i}{\varepsilon} \int_0^\infty x^p dx \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Gli integrali che compaiono ai secondi membri di tali equazioni possono essere trasformati mediante integrazione per parti. A tale scopo si considerino soltanto i valori di p la cui parte reale $\mathcal{R}p$ soddisfa alla condizione $0 < \mathcal{R}p < s$.

Scegliendo $\int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(x, y) \frac{d\xi}{\xi^2}$ quale fattore finito e $x^p dx$ quale fattore differenziale

(si osservi che è $\frac{d}{dx} \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{\varepsilon}{x^2} H_i(x/\varepsilon, y)$) si ottiene:

$$\int_0^\infty x^p dx \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} \right]_0^\infty + \frac{\varepsilon}{p+1} \int_0^\infty x^{p-1} H_i(x/\varepsilon, y) dx.$$

Si ammetterà ora che nella striscia (β'_i, γ'_i) di convergenza assoluta le funzioni

$x^{p+1} \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2}$ tendano allo zero, tanto per $x \rightarrow 0$ quanto per $x \rightarrow +\infty$ ⁽²⁾.

(2) Manifestamente una tale ipotesi non può essere giustificata pienamente nell'attuale fase del ragionamento, essendo ancora incognite le funzioni e le rispettive strisce di convergenza. Tuttavia l'ipotesi risulta plausibile per quanto riguarda il limite per $x \rightarrow 0$, se si pensa che le funzioni $H_i(x, y)$, per il loro significato fisico, ten-

dono a limiti finiti per $x \rightarrow 0$. Perciò le funzioni $\int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \cdot d\xi/\xi^2$ al tendere di x allo

zero tendono all' ∞ come $1/x$, e quindi, se è $\mathcal{R}p > 0$, le funzioni $x^{p+1}/(p+1) \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \cdot d\xi/\xi^2$ tendono allo zero. In quanto poi al caso $x \rightarrow \infty$, è sufficiente che per tale limite

le $H_i(x, y)$ tendano allo zero come x^{-s} . In tal caso le funzioni $\int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \cdot d\xi/\xi^2$ ten-

dono allo zero come x^{-s-1} per $x \rightarrow \infty$ e perciò è sufficiente che risulti $\mathcal{R}p < s$, affinché si abbia

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{p+1}}{p+1} \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} = 0.$$

Una giustificazione completa dell'assunto è stata data a posteriori attraverso una verifica diretta dei risultati ottenuti: per brevità la complessa dimostrazione non viene qui riportata.

Con una tale ipotesi e facendo ricorso alla sostituzione $x = \varepsilon t$, dalla precedente si trova:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^p dx \int_{x/\varepsilon}^\infty H_i(\xi, y) \frac{d\xi}{\xi^2} &= \frac{\varepsilon}{p+1} \int_0^\infty x^{p-1} H_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, y\right) dx = \frac{\varepsilon}{p+1} \int_0^\infty \varepsilon^{p-1} t^{p-1} H_i(t, y) d(\varepsilon t) = \\ &= \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} \int_0^\infty t^{p-1} H_i(t, y) dt = \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} \mathcal{L}_i(p, y), \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è stato eseguito in forza della (9).

Le (11) diventano così:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i(p, y)}{\partial y} + \mathcal{L}_i(p, y) = \frac{\sigma_i \varepsilon^p}{p+1} \mathcal{L}_i(p, y),$$

ossia:

$$(12) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_i(p, y)}{\partial y} + \lambda_i \mathcal{L}_i(p, y) = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_i = 1 - \frac{\sigma_i \varepsilon^p}{p+1}.$$

Le (12) possono essere riguardate quali equazioni differenziali ordinarie rispetto alla sola variabile y . Esse perciò si integrano facilmente e si ha:

$$(13) \quad \mathcal{L}_i(p, y) = C_i \exp(-\lambda_i y),$$

dove le C_i sono funzioni della sola p . Da tali relazioni, dalla (9), dalle condizioni iniziali (7) e sempre supponendo $0 < \mathcal{R}p < s$ si ottiene:

$$\begin{aligned} (14) \quad C_i = \mathcal{L}_i(p, 0) &= \int_0^\infty x^{p-1} H_i(x, 0) dx = \int_0^{x_0} x^{p-1} P_0 x_0^{-s} dx + \int_{x_0}^\infty x^{p-1} P_0 x^{-s} dx = \\ &= P_0 x_0^{-s} \left[\frac{x^p}{p} \right]_0^{x_0} + P_0 \left[\frac{x^{p-s}}{p-s} \right]_{x_0}^\infty = \frac{P_0}{p} x_0^{-s} x_0^p + P_0 \frac{x_0^{p-s}}{s-p} = P_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) x_0^{p-s}. \end{aligned}$$

Le (13) diventano così:

$$(15) \quad \mathcal{L}_i(p, y) = P_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) x_0^{p-s} \exp(-\lambda_i y).$$

Le funzioni $\mathcal{L}_i(p, y)$ ora ottenute sono le trasformate di Mellin delle funzioni $H_i(x, y)$ ($i=1, 2$). Esse sono state ottenute sotto le ipotesi che la parte reale $\mathcal{R}p$ della variabile p soddisfi alle condizioni $0 < \mathcal{R}p < s$. È soltanto imponendo alla p tale condizione che si è resa possibile la valutazione delle C_i mediante le (14). Perciò le striscie (β'_i, λ'_i) di convergenza assoluta degli integrali (9) soddisfano alle condizioni $0 < \beta'_i < \gamma'_i < s$. Se pertanto si indica con α_i un numero reale interno all'intervallo (β'_i, γ'_i) di convergenza assoluta, per cui si ha $0 < \alpha_i < s$, l'applicazione alle (15) della formula di inversione (8')

condurre, relativamente ai punti (x, y) in cui le funzioni $H_i(x, y)$ sono continue rispetto alla x , al seguente risultato:

$$\begin{aligned} H_i(x, y) &= \frac{P_0}{2\pi j} \int_{\alpha_i - j\infty}^{\alpha_i + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) x^{-p} x_0^{2-s} \exp(-\lambda_i y) dp = \\ &= \frac{P_0 x_0^{-s}}{2\pi j} \int_{\alpha_i - j\infty}^{\alpha_i + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{x_0}{x} \right)^p \exp(-\lambda_i y) dp. \end{aligned}$$

Tenendo presenti le espressioni (12) delle λ_i si può scrivere:

$$(16) \quad H_i(x, y) = \frac{P_0 x_0^{-s} \exp(-y)}{2\pi j} \int_{\alpha_i - j\infty}^{\alpha_i + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{x_0}{x} \right)^p \exp\left(\frac{\sigma_i \varepsilon^p y}{p+1}\right) dp.$$

Si osservi che le funzioni integrande che compaiono negli integrali a secondo membro delle (16) ammettono singolarità soltanto in $p = -1$, $p = 0$, $p = s$, $d = \infty$. Si osservi ancora che se p tende all'infinito rispettando la condizione $0 < \mathcal{R}p < s$ le funzioni integrande si annullano, inquantochè i fattori $\sigma_i \varepsilon^p / (p+1)$ tendono soltanto allo zero e inquantochè il fattore $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{x_0}{x} \right)^p$ tende pure allo zero. Perciò se esistono due valori α_1 e α_2 soddisfacenti alle limitazioni $0 < \alpha_1 < s$, $0 < \alpha_2 < s$ e tali che in corrispondenza di essi gli integrali (16) convergano, tali integrali convergono anche per tutti gli altri valori α_i dell'intervallo $0 < \alpha_i < s$, assumendo ciascun integrale sempre lo stesso valore. Si può così adottare sia per α_1 che per α_2 uno stesso valore α con la limitazione $0 < \alpha < s$ e scrivere:

$$(17) \quad H_i(x, y) = \frac{P_0 x_0^{-s}}{2\pi j} \exp(-y) \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{x_0}{x} \right)^p \exp\left(\frac{\sigma_i \varepsilon^p y}{p+1}\right) dp.$$

Occorre ora procedere alla trasformazione delle soluzioni.

Si osservi che lungo la retta $\mathcal{R}p = \alpha$ le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\sigma_i \varepsilon^p y}{p+1} \right)^n$, che hanno per somma $\exp\left(\frac{\sigma_i \varepsilon^p y}{p+1}\right)$, risultano entrambe uniformemente convergenti. Ciò offre la possibilità di sviluppare in serie le funzioni che compaiono negli integrali (17) e di integrare poi termine a termine. Si ha così:

$$\begin{aligned} (18) \quad \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{x_0}{x} \right)^p \exp\left(\frac{\sigma_i \varepsilon^p y}{p+1}\right) dp &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{x_0}{x} \right)^p \frac{\varepsilon^{np}}{(p+1)^n} dp = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \frac{1}{(p+1)^n} \exp(a_n p) dp, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$(19) \quad a_n = \log\left(\frac{x_0 \varepsilon^n}{x}\right) = \log x_0 - \log x + n \log \varepsilon.$$

Dalle (18) e dalle (17) si ottiene:

$$(20) \quad H_i(x, y) = \frac{P_0 x_0^{-s} \exp(-y)}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \frac{1}{(p+1)^n} \exp(a_n p) dp.$$

Si considerino ora un valore della x e un intero n , tali che si abbia $a_n < 0$. Allora l'integrale della funzione $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_n p)/(p+1)^n$ esteso alla semicirconferenza $p = \alpha + Re^{j\theta} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ tende allo zero al tendere del raggio R all'infinito. Perciò l'integrale della detta funzione lungo la retta $\mathcal{R}p = \alpha$ può essere pensato quale limite dell'integrale esteso a una curva chiusa dalla detta semicirconferenza e dal suo diametro al tendere di R all'infinito. Poichè nel semipiano $\mathcal{R}p > \alpha$ l'unico punto singolare della funzione integranda si ha in $p = s$, il teorema dei residui fornisce:

$$(21) \quad \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \frac{1}{(p+1)^n} \exp(a_n p) dp = 2\pi j \frac{1}{(s+1)^n} \exp(a_n s), \quad (a_n < 0).$$

Se invece x e n sono tali per cui risulti $a_n > 0$ ($n \geq 1$), la valutazione dell'integrale si può effettuare con procedimento analogo, purchè si consideri la semicirconferenza $p = \alpha + Re^{j\theta} \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi \right)$, in quanto che, per $R \rightarrow \infty$, si annulla l'integrale della funzione $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_n p)/(p+1)^n$ lungo tale semicirconferenza. Si tratta quindi di integrare la detta funzione lungo una curva chiusa contenente i punti $p = 0$ e $p = -1$, perchè questi sono gli unici punti singolari di essa situati nel semipiano $\mathcal{R}p < \alpha$. I residui della funzione integranda in $p = 0$ e $p = -1$ sono rispettivamente:

$$1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_n p)$$

per cui risulta:

$$(22) \quad \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \frac{\exp(a_n p)}{(p+1)^n} dp = \\ = 2\pi j + \frac{2\pi j}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_n p) \right]_{p=-1}, \quad (a_n > 0, n \geq 1).$$

Se è $a_0 > 0$, si ha:

$$(23) \quad \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_0 p) dp = 2\pi j, \quad (a_0 > 0).$$

Mediante le (21), (22), (23) si può procedere alla trasformazione ulteriore delle (20). Sia infatti $x > x_0$. In tal caso la (19) (si ricordi che è $\varepsilon < 1$) for-

nisce $a_n < 0$ per ogni valore $0, 1, 2, \dots$ di n . Pertanto la (20) può essere valutata facendo ricorso alla (21). Si ottiene così:

$$H_i(x, y) = \frac{P_0 x_0^{-s}}{2\pi j} \exp(-y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} 2\pi j \frac{1}{(s+1)^n} \exp(a_n s),$$

da cui, essendo per la (19) $\exp(a_n s) = \frac{x_0^s \varepsilon^n}{x^s}$, si trae:

$$\begin{aligned} (24') \quad H_i(x, y) &= P_0 x_0^{-s} \exp(-y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \frac{x_0^s (\varepsilon^n)^n}{x^s (s+1)^n} = \\ &= P_0 x^{-s} \exp\left(\frac{\sigma_i \varepsilon^s}{s+1} - 1\right) y, \quad (x > x_0). \end{aligned}$$

Invece se è $\varepsilon x_0 < x < x_0$, dalla (19) si ottiene $a_0 > 0$ e $a_n < 0$ (per $n \geq 1$). Il primo termine della serie (20), corrispondente al caso $n=0$, dovrà essere calcolato mediante la (23), mentre tutti gli altri termini mediante la (21). Si ha così:

$$\begin{aligned} (24'') \quad H_i(x, y) &= P_0 x_0^{-s} \exp(-y) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \frac{x_0^s (\varepsilon^n)^n}{(s+1)^n x^s} \right] = \\ &= P_0 x_0^{-s} \exp(-y) \left[1 - \frac{x_0^s}{x^s} + \frac{x_0^s}{x^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n (\varepsilon^n)^n}{(s+1)^n} \right] = \\ &= P_0 x^{-s} \exp(-y) \left[\frac{x^s}{x_0^s} - 1 + \exp\left(\frac{\sigma_i y \varepsilon^s}{(s+1)}\right) \right], \quad (\varepsilon x_0 < x < x_0). \end{aligned}$$

Se invece è $\varepsilon^{v+1} x_0 < x < \varepsilon^v x_0$ ($v \geq 1$), dalla (19) si ha $a_n > 0$ per $n \leq v$ e $a_n < 0$ per $n \geq v+1$. Perciò nella (20) si dovrà calcolare il primo termine, corrispondente al valore $n=0$, mediante la (23), i successivi v termini mediante la (22) e tutti gli altri mediante la (21). Si ottiene così:

$$\begin{aligned} (24''') \quad H_i(x, y) &= \frac{P_0 x_0^{-s} \exp(-y)}{2\pi j} \left[\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_0 p) dp + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^v \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \frac{\exp(a_n p)}{(p+1)^n} dp + \\ &+ \left. \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \frac{\exp(a_n p)}{(p+1)^n} dp \right] = \\ &= P_0 x^{-s} \exp\left[\left(\frac{\sigma_i \varepsilon^s}{s+1} - 1\right) y\right] + P_0 x_0^{-s} \exp(-y) \left[1 + \sum_{n=1}^v \frac{\sigma_i^n y^n}{n!} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^v \frac{\sigma_i^n y^n}{n! (n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} \right) \exp(a_n p) \right\} \right]_{p=-1} - \frac{x_0^s}{x^s} \sum_{n=0}^v \frac{\sigma_i^n y^n (\varepsilon^n)^n}{n! (s+1)^n} \\ &(\varepsilon^{v+1} x_0 < x < \varepsilon^v x_0; v \geq 1). \end{aligned}$$

È chiaro che le formule (24'), (24'') e (24''') risolvono completamente il problema propostoci.

3. - Calcoli numerici e conclusioni.

Abbiamo applicato le formule dedotte al numero precedente per valutare l'effetto di latitudine della componente nucleonica (protonica, neutronica e totale) limitatamente alle particelle veloci ($E \geq 2,5$ GeV). Nei calcoli numerici, osservando che il coefficiente di assorbimento della componente nucleonica è di circa 125 g/cm^2 , si è assunto (date le unità di misura da noi adottate)

$\alpha = 1 - \frac{\sigma_1 \varepsilon^s}{s + 1} = 0,40$. Dato poi che per quanto riguarda le probabilità relative dei vari processi in concorrenza nello schema di produzione dei mesoni

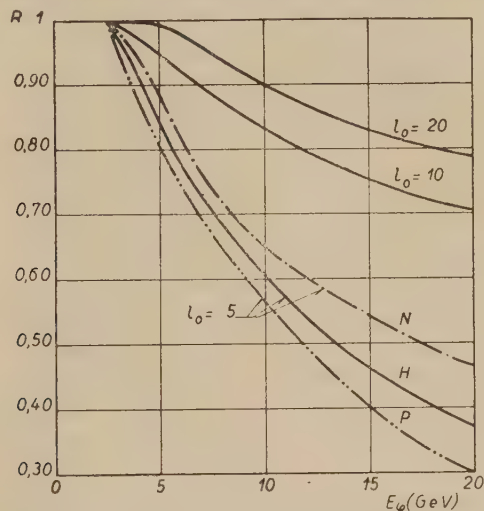


Fig. 1. - Rapporto fra il numero totale di nucleoni con $E \leq E_\pi$ ($= 2,5$ GeV) alla latitudine magnetica φ (taglio corrispondente E_φ) e quello a latitudini $\varphi \geq \varphi_0$ ($= 50^\circ$).

abbiamo mantenuto per semplicità l'ipotesi, già adottata con successo in (I), che sia $\gamma = 1/2$ e $\nu = 1/3$, risulta un valore di $\varepsilon = 0,90$.

I risultati dei calcoli numerici eseguiti sono compendati nei grafici riportati delle varie figure. Precisamente, nella fig. 1, sono rappresentati i rapporti

$$R_P(E_\varphi, l_0) = \frac{P_\varphi(E_\pi, l_0)}{P_{>\varphi_0}(E_\pi, l_0)}, \quad R_N(E_\varphi, l_0) = \frac{N_\varphi(E_\pi, l_0)}{N_{>\varphi_0}(E_\pi, l_0)},$$

$$R_H(E_\varphi, l_0) = \frac{H_\varphi(E_\pi, l_0)}{H_{>\varphi_0}(E_\pi, l_0)},$$

fra il numero di nucleoni (rispettivamente protoni, neutroni e totali) che alla latitudine φ (cui corrisponde un'energia di taglio E_φ sullo spettro della primaria protonica) hanno energia superiore al valore critico E_π ($= 2,5$ GeV) per la produzione di mesoni (cfr. I) e il numero di nucleoni dello stesso tipo

ad una latitudine $> \varphi_0$ (circa 50°) ove non è più sensibile l'azione del taglio: tali curve sono calcolate a diverse quote ($l_0 = 20, 10, 5$).

Per $l_0 = 20$ (circa al l.d.m.) e per $l_0 = 10$ (circa 5-600 m d'altitudine) si hanno praticamente gli stessi valori di $R(E_\varphi, l_0)$ per i vari tipi di nucleoni, vale a dire è $R_P(E_\varphi, l_0) \cong R_N(E_\varphi, l_0) \cong R_H(E_\varphi, l_0)$. Non così per altitudini assai elevate (cfr. ad es. la curva relativa a $l_0 = 5$, che corrisponde a circa

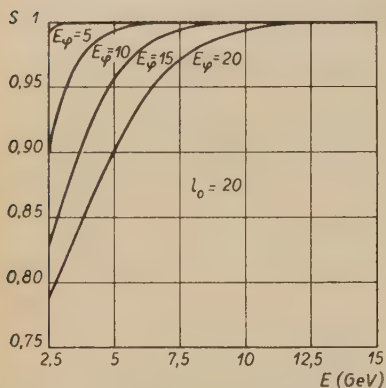


Fig. 2. - Rapporto fra lo spettro integrale dei nucleoni alla latitudine magnetica φ (taglio corrispondente E_φ) e quello corrispondente a latitudini $\varphi > \varphi_0$ ($=50^\circ$) ($l_0 = 20$).

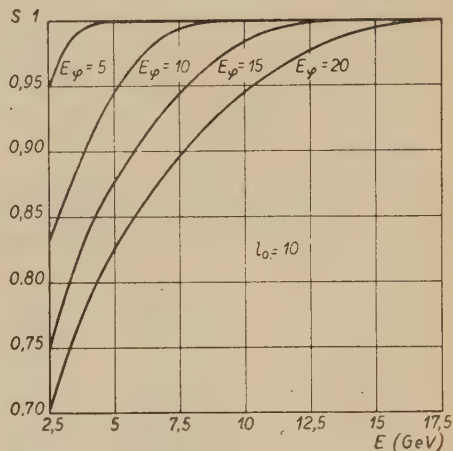


Fig. 3. - Rapporto fra lo spettro integrale dei nucleoni alla latitudine magnetica φ (taglio corrispondente E_φ) e quello corrispondente a latitudini $\varphi > \varphi_0$ ($=50^\circ$) ($l_0 = 10$).

10 000 m sul l.d.m.) ove i valori di $R_N(E_\varphi, l_0)$ per i neutroni diventano sensibilmente superiori a quelli $R_P(E_\varphi, l_0)$ per i protoni.

Giova osservare a questo punto come i risultati relativi a $l_0 = 20$, vale a dire circa al l.d.m., coincidono praticamente con quelli che si deducono dai calcoli analoghi (relativi alla sola componente nucleonica totale) eseguiti da HEITLER e JANOSSY⁽³⁾: in entrambe le teorie l'effetto di latitudine per la componente nucleonica risulta essere di circa il 15 %.

⁽³⁾ W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A 42, 374 (1949). Questi Autori hanno calcolato l'effetto di latitudine della componente nucleonica totale in base a una teoria che differisce da quella sviluppata in (I) per quanto riguarda le ipotesi circa la ripartizione dell'energia fra il mesone creato in un urto e i due nucleoni urtanti. Essi trovano un effetto di latitudine (al l.d.m.) praticamente eguale a quello che risulta dai nostri calcoli. Il metodo impiegato dai predetti Autori per la soluzione dell'equazione integro-differenziale che nella loro teoria corrisponde alla (1*) è però solo approssimato e può portare ad errori abbastanza sensibili. D'altra parte il fatto che, nello studio della distribuzione della componente nucleonica e anche di quella mesonica nell'atmosfera, la teoria di HEITLER e JANOSSY e quella sviluppata

Abbiamo poi calcolato le funzioni di distribuzione $P_\varphi(E, l_0)$, $N_\varphi(E, l_0)$ e $H_\varphi(E, l_0)$ in corrispondenza a diversi valori della profondità atmosferica ($l_0 = 5, 10, 20$) e dell'energia di taglio ($E_\varphi = 5, 10, 15, 20$ GeV). I risultati ottenuti sono compendati nelle curve tracciate nelle figg. 2, 3, 4, dove sono rappresentati i rapporti

$$S_P(E; l_0, \varphi) = \frac{P_\varphi(E, l_0)}{P_{>\varphi_0}(E, l_0)}, \quad S_N(E; l_0, \varphi) = \frac{N_\varphi(E, l_0)}{N_{>\varphi_0}(E, l_0)},$$

$$S_H(E; l_0, \varphi) = \frac{H_\varphi(E, l_0)}{H_{>\varphi_0}(E, l_0)},$$

fra le suddette funzioni e quelle corrispondenti alle distribuzioni senza taglio magnetico. Tali curve hanno un'importanza fondamentale per lo studio della

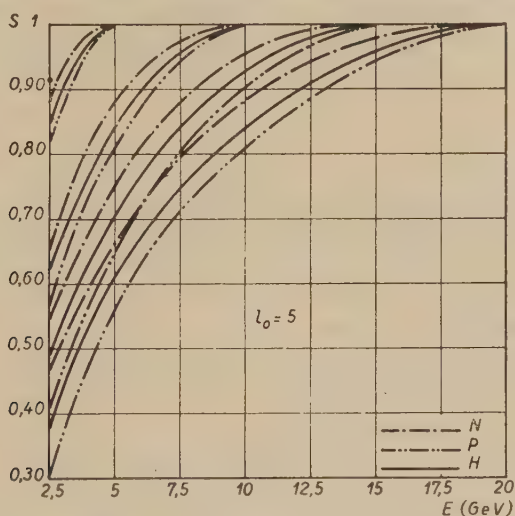


Fig. 4. - Rapporto fra lo spettro integrale dei nucleoni alla latitudine magnetica φ (taglio corrispondente E_φ) e quello corrispondente a latitudini $\varphi \geq \varphi_0$ ($= 50^\circ$) ($l_0 = 5$; $E_\varphi = 5, 10, 15, 20$ GeV).

distribuzione della componente mesonica nell'atmosfera alle varie latitudini.

Le misure sperimentali relative all'effetto di latitudine della componente nucleonica della radiazione cosmica sono scarse e piuttosto incerte, per cui non è possibile sottoporre i risultati dei calcoli da noi eseguiti ad una seria verifica. Si tenga conto d'altra parte che dalle curve di fig. 1 risulta chiaramente che, almeno se ci si limita a misure eseguite in stazioni terrestri (per

in (I) portino praticamente agli stessi risultati si può comprendere immediatamente osservando che nella prima teoria l'energia *media* ceduta al mesone creato in un urto è proporzionale all'energia del nucleone incidente, come si suppone in (I) per la stessa energia *effettiva* del mesone.

cui $l_0 > 8$), l'effetto del taglio magnetico sui nucleoni è sempre piuttosto piccolo. Questa osservazione permette di spiegare i risultati delle misure di APPAPILLAI e MAILVAGANAM ⁽⁴⁾ i quali, operando al l.d.m. e ad una latitudine $\varphi = 3^\circ$, non hanno rivelato alcun effetto di latitudine sulla componente generatrice degli sciami penetranti: l'incertezza delle loro misure è tale da mascherare un effetto di solo il 15 % circa come prevede la teoria.

Lo stesso si può probabilmente dire delle misure (eseguite a circa 9000 m d'altezza, per cui $l_0 \approx 6,2$) di BIEHL, NEHER e ROESCH ⁽⁵⁾ sull'effetto di latitudine degli sciami estesi, il cui processo di generazione si ritiene in relazione diretta con quello della generazione degli sciami penetranti.

Si noti infine che eventuali esperienze rivolte a mettere in evidenza un effetto di latitudine della componente nucleonica attraverso una dipendenza del coefficiente di assorbimento dalla latitudine stessa sembrano essere di discutibile efficacia, inquantochè dalle curve di fig. 1 risulta, ad es., che in corrispondenza di $\varphi = 3^\circ$ ($E_\varphi \approx 15$ GeV) e di $\varphi > 50^\circ$ si ha:

$$\frac{H_{\varphi=3^\circ}(2, 5; 10)}{H_{\varphi=3^\circ}(2, 5; 20)} = \frac{R_H(15; 10)}{R_H(15; 20)} \frac{H_{\varphi \geq 50^\circ}(2, 5; 10)}{H_{\varphi \geq 50^\circ}(2, 5; 20)} \approx \frac{0,75}{0,825} \frac{H_{\varphi \geq 50^\circ}(2, 5; 10)}{H_{\varphi \geq 50^\circ}(2, 5; 20)} \approx 0,91 \frac{H_{\varphi \geq 50^\circ}(2, 5; 10)}{H_{\varphi \geq 50^\circ}(2, 5; 20)},$$

per cui si tratta di un effetto assai piccolo tale da render dubbia la possibilità di una sua misura.

L'effetto di latitudine della componente nucleonica si rispecchia infine in un analogo effetto relativo alla componente mesonica, il quale è però di più facile osservazione sperimentale.

È nostro dovere ringraziare gli studenti R. FIESCHI e P. GULMANELLI per la loro preziosa collaborazione nell'esecuzione dei calcoli numerici.

⁽⁴⁾ V. APPAPILLAI e A. W. MAILVAGANAM: *Nature*, **162**, 887 (1948).

⁽⁵⁾ A. T. BIEHL, H. V. NEHER e W. C. ROESCH: *Phys. Rev.*, **76**, 914 (1949).

SUMMARY

In this paper the effect of the latitude cut-off on the distribution law of the nucleonic (protonic, neutronic and total) component in the cosmic radiation throughout the whole atmosphere is calculated and discussed starting from the assumption of the existence at the limit of the atmosphere of a primary radiation consisting of protons having an integral energy spectrum proportional to E^{-s} and assuming a model for the « plural » creation of mesons suggested by one of us ⁽¹⁾ in a preceding paper. Our theoretical results are finally compared with those of other Authors and with experimental data.

Misura della sezione d'urto di fissione dell'Uranio per neutroni termici.

U. FACCHINI e E. GATTI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 19 Maggio 1950)

Riassunto. — Si riferisce su una misura della sezione d'urto di fissione dell' U^{235} per neutroni lenti. La misura si basa sul valore della sezione d'urto del processo $Li^6(n, \alpha)H^3$, che è nota con l'approssimazione del 2%. Il valore ottenuto è $\sigma_{U^{235}} = 551 \pm 17$ barns per neutroni di 2200 ms^{-1} .

1. — La misura è basata sul confronto tra la $\sigma_{U^{235}}$ da determinarsi e la σ di un processo nucleare facilmente rivelabile. È parsa conveniente la reazione $Li^6(n, \alpha)H^3$ la cui sezione d'urto segue la legge $\sigma = \sigma_0 v_0/v$ ed è nota con buona precisione.

L'U ed il Li in forma di strati sottili vengono messi, con identica geometria, successivamente in una stessa camera di ionizzazione; indi si pone la camera di ionizzazione al centro di una cavità in un blocco di paraffina, dove viene irraggiata da un flusso costante di neutroni termici. Si contano le fissioni del Li e quelle dell'U e si ripetono i due conteggi circondando la camera di ionizzazione con Cd, in modo da valutare il contributo alle fissioni dovuto ai neutroni epitermici e veloci; tale contributo va detratto dal numero di fissioni conteggiate nelle misure senza Cd.

Se la camera fosse irraggiata da neutroni monocromatici di velocità v varrebbe la relazione

$$(1) \quad \frac{\sigma_U(v)}{\sigma_{Li}(v)} = \frac{n_{Li}}{n_U} \cdot \frac{S_U}{S_{Li}} = \frac{N_U}{N_{Li}} \cdot \frac{P_U}{P_{Li}}$$

dove

$$\begin{aligned}
 n_{\text{Li}} &= \text{numero di nuclei di Li per cm}^2; \\
 n_{\text{U}} &= \text{numero di nuclei di U per cm}^2; \\
 S_{\text{Li}} &= \text{fissioni del Li per minuto}; \\
 S_{\text{U}} &= \text{fissioni dell'U per minuto}; \\
 N_{\text{Li}} &= \text{fissioni del Li per mg e per minuto}; \\
 N_{\text{U}} &= \text{fissioni dell'U per mg e per minuto}; \\
 P_{\text{Li}} &= \text{peso molecolare del Li}; \\
 P_{\text{U}} &= \text{peso molecolare dell'U}.
 \end{aligned}$$

Con i neutroni termici della cavità a paraffina, che presentano una distribuzione di velocità di tipo maxwelliano, la formula da usarsi è

$$\frac{S_{\text{U}}}{S_{\text{Li}}} \frac{n_{\text{Li}}}{n_{\text{U}}} = \frac{\int_0^{\infty} \sigma_{\text{U}}(v) \Phi(v) dv}{\int_0^{\infty} \sigma_{\text{Li}}(v) \Phi(v) dv},$$

dove $\Phi(v) dv$ è il numero di neutroni per cm^2 e per s, di velocità compresa fra v e $v + dv$. Ma questa formula si riduce alla (1) nel caso che entrambe le sezioni d'urto seguano la legge dell' $1/v$, ipotesi che considereremo valida nel seguito.

Il numero di nuclei n_{Li} si deduce da una accurata pesata dello strato di Li. Il numero di nuclei n_{U} si deduce dal conteggio delle particelle α emesse dall'U medesimo: è noto, con molta precisione il numero di particelle α emesse da 1 mg di U.

2. - Gli strati di Li e di U usati devono essere sottili rispetto al percorso dei prodotti di fissione, che in generale è di pochi micron, in modo che una minima parte delle particelle di fissione sia assorbita dallo strato stesso o ivi esaurisca considerevole parte del suo percorso ⁽¹⁾. In pratica si contano con il dispositivo camera-amplificatore-discriminatore solo particelle che hanno perduto nel gas della camera una energia maggiore di un valore di taglio E .

Una volta conteggiato il numero di tali particelle, si risale al numero totale di particelle emesse mediante il fattore di correzione $\varepsilon(E)$ ⁽²⁾:

$$(2) \quad N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E) = \frac{2N(E)}{1 - \frac{1}{2} \frac{d}{R_0 - R(E)}},$$

⁽¹⁾ Tale condizione è più restrittiva di quella che deriva dall'evitare un apprezzabile autoassorbimento dei neutroni da parte degli strati di Li e di U.

⁽²⁾ B. ROSSI e H. STAUB: *Ionization Chambers and Counters* (McGraw Hill 1949).

dove

- N_0 = numero totale di particelle emesse;
 $N(E)$ = numero conteggiato all'energia di taglio E ;
 d = spessore dello strato in mg/cm^2 ;
 R_0 = percorso delle particelle in mg/cm^2 ;
 $R(E)$ = percorso di una particella avente energia E .

Questa formula vale per particelle monocromatiche e si hanno formule analoghe nel caso di gruppi di particelle di diversa energia.

Tale formula non tiene però conto delle particelle che, emesse nel semispazio opposto a quello della zona di conteggio, per effetto della diffusione multipla coulombiana con gli atomi del supporto vengono deviate e portate ad emergere nel gas con energia eventualmente maggiore di E (correzione di retrodiffusione); essa va pertanto modificata sulla base dei calcoli di CRAWFORD, a cui rimandiamo ⁽³⁾. Ci limitiamo a esporre quanto segue.

Il parametro elementare del processo di diffusione multipla è l'angolo θ medio che si ha fra le tangenti alla traiettoria delle particelle prese in due punti che distino di un tratto unitario assegnato. Ci siamo basati sul valore sperimentale di θ dato da CRAWFORD per particelle α di 5,6 cm di percorso: $\theta = 2,1^\circ$ per uno spessore di Au equivalente a 1 cm di aria.

I valori di θ per le particelle di altra energia o di altro tipo li abbiamo calcolati seguendo la formula approssimata ⁽⁴⁾:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} \cong \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{E_2}{E_1}.$$

A partire da questo parametro elementare θ si introduce una funzione $\Phi(s)$ che è definita come l'angolo di deviazione media tra la direzione iniziale della traiettoria e la corda congiungente il punto origine e il punto della traiettoria stessa che dista dall'origine un tratto s . Tale funzione è data da:

$$(3) \quad \Phi^2(s) = \left(\frac{d\theta^2}{ds} \right)_0 S \left(\frac{S}{s} \right)^2 \left[2 \left(1 - \frac{s}{S} \right) \ln \left(1 - \frac{s}{S} \right) + 2 \frac{s}{S} - \left(\frac{s}{S} \right)^2 \right],$$

essendo

$$\left(\frac{d\theta^2}{ds} \right)_0 S = \theta^2 \frac{S - s'}{s'},$$

dove

- S = percorso totale;
 s' = percorso dopo il quale si ha il valore θ .

⁽³⁾ S. T. SEABORG, J. J. KATZ e W. M. MANNING: *The Transuranian Elements*, part II (McGraw Hill 1949).

⁽⁴⁾ J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc., A* **169**, 531 (1939); *Phys. Rev.*, **58**, 292 (1940).

Φ (come θ) dipende dal materiale in cui avviene la diffusione multipla: si passa da un materiale ad un altro materiale mediante la seguente formula:

$$\Phi_{A_1} = \Phi_{A_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{3/4},$$

dove Φ_A è il valore di Φ per un supporto avente nuclei di peso atomico A .

La funzione Φ permette di calcolare agevolmente la probabilità che una particella emessa nel semispazio opposto alla zona di conteggio emerga in tale zona con un percorso residuo maggiore di $S-s$, cui corrisponde una energia maggiore di E . Tale probabilità è data da $B = 0,402 \Phi[s(E)] = 0,402 \Psi(E)$ ed è indipendente per strati sottili dallo spessore dello strato.

Per le particelle α dell'U tenendo conto della correzione di retrodiffusione e del fatto che si hanno due gruppi di particelle α le formule del tipo della (2) diventano, con ovvio significato dei simboli:

$$(4) \quad N_\alpha = \frac{2N(E)}{1 - \frac{d}{4} \left[\frac{1}{R'_0 - R(E)} + \frac{1}{R''_0 - R(E)} \right] + 0,402 \Psi(E)}$$

e per le particelle di fissione del Li, cioè per le particelle α e per i tritoni, H^3 :

$$(5) \quad N_{f, Li} = \frac{N(E)}{1 - \frac{d}{4} \left[\frac{1}{R_{0H^3} - R_{H^3}(E)} + \frac{1}{R_{0\alpha} - R_\alpha(E)} \right] + \frac{0,402 \Psi_\alpha(E) + 0,402 \Psi_{H^3}(E)}{2}}$$

Nel caso delle fissioni dell'U, Ψ è trascurabile e la formula è:

$$(6) \quad N_{f, U} = \frac{N(E)}{1 - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{\bar{R}_0 - \bar{R}(E)} \right)},$$

essendo \bar{R}_0 ed $\bar{R}(E)$ i valori di percorso mediati sui due gruppi di frammenti di fissione.

Per applicare tali formule è necessario conoscere l'energia E corrispondente al valore di taglio del discriminatore: la scala del discriminatore viene tarata in energia per mezzo delle curve di distribuzione di ampiezza delle particelle α dell'U ed α e H^3 del Li, che hanno energia nota.

3. - La camera di ionizzazione a griglia è a raccolta di elettroni, il gas di riempimento è Argon (fig. 1).

Sull'elettrodo A è collocato lo strato emittente. La superficie di questo, rispetto a quella degli elettrodi, la distanza fra lo strato emittente e la griglia, la pressione del gas, sono scelti in modo che le particelle emesse dallo strato esauriscano il loro percorso nella zona fra l'elettrodo emittente e la griglia e dove il campo elettrico è uniforme.

La griglia è costituita da fili di acciaio inossidabile, da 0,1 mm, tesi su un

opportuno telaio: i fili sono paralleli e distanti fra loro circa 1,5 mm; essa è disposta a 15 mm dall'elettrodo emittente e a 5 mm dall'elettrodo collettore.

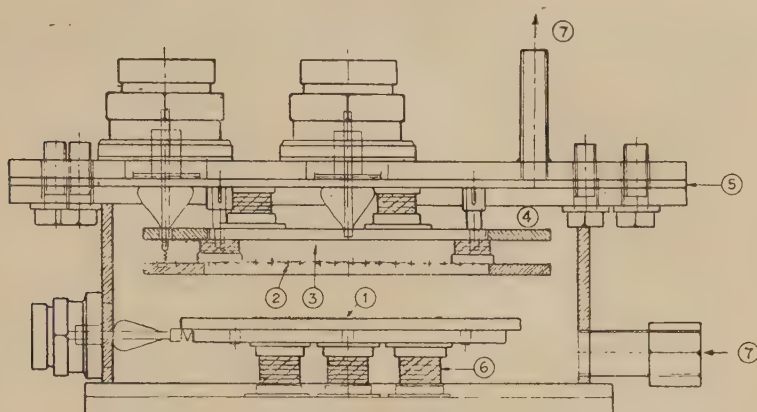


Fig. 1. - Camera di ionizzazione. — 1, strato; 2, griglia; 3, collettore; 4, anello di guardia; 5, gomma; 6, plexiglas; 7, circolazione del gas.

Tale geometria garantisce una vasta zona di tensioni di griglia per cui la cattura di elettroni da parte della griglia stessa è trascurabile ⁽⁵⁾.

Alla camera è collegato mediante due tubi, in modo da poter realizzare una circolazione a termosifone, il purificatore dell'Argon (fig. 2); questo è un cilindro di acciaio inossidabile riempito con trucioli di Ca metallico, separati da diaframmi in lastra di ferro, forati in modo da costringere l'Argon ad un lungo percorso fra i trucioli di Ca. Il cilindro è circondato da un elemento riscaldante a resistenza.

La vuotatura e il riempimento della camera-purificatore si fanno con una pompa rotativa e Argon commerciale. Prima di effettuare il riempimento il Ca viene degassato a 400-500 °C sotto vuoto per qualche ora. Con pressioni di Argon di 5 atmosfere dopo qualche ora di funzionamento a 300-350 °C del purificatore la camera raggiunge buone condizioni di lavoro.

I tempi di salita degli impulsi sono dell'ordine del microsecondo.

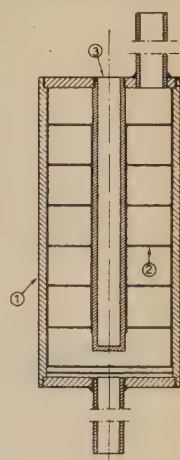


Fig. 2. - Purificatore dell'Argon: 1, acciaio inossidabile; 2, diaframmi di ferro; 3, alloggiamento per il termometro.

⁽⁵⁾ O. BUNEMANN, T. E. CRANSHAW e J. A. HARVEY: *Can. Journ. of Res. sect. A*, 27, 191 (1949).

4. - Lo schema delle apparecchiature elettroniche è illustrato nella fig. 3.

Come sorgente di alta tensione per l'elettrodo emittente e per la griglia viene utilizzata una pila di 2300 V, formata da una serie di circa 500 pile a secco da 4,5 V l'una. L'alta tensione è portata alla camera attraverso due filtri resistenza capacità, $C = 0,5 \mu\text{F}$, $R = 10 \text{ M}\Omega$. Un grosso condensatore

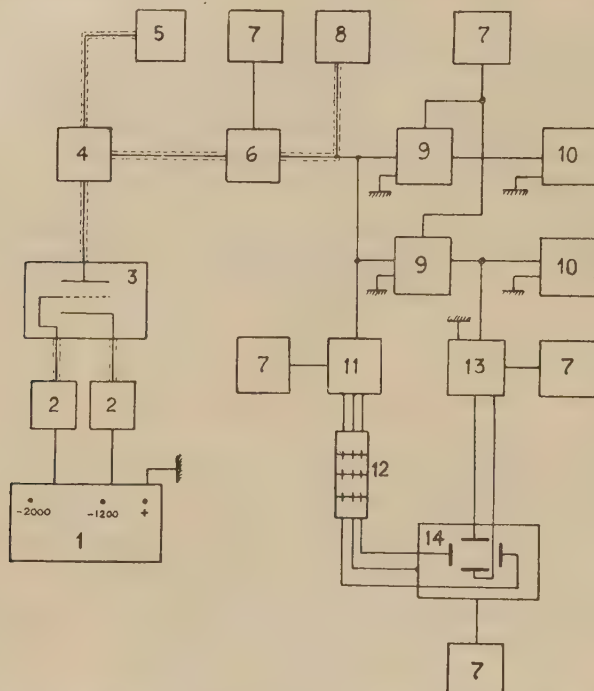


Fig. 3. - Schema dei circuiti: 1, pila 2 kV; 2, filtri; 3, camera; 4, preamplificatore mod. 100; 5, pila alimentazione; 6, amplificatore mod. 100; 7, alimentatori; 8, oscilloscopio; 9, discriminatori; 10, scale di 16; 11, amplificatore; 12, linea di ritardo; 13, sincroscopio; 14, oscilloscopio postaccelerato.

da $0,1 \mu\text{F}$ è direttamente inserito su ciascuno dei due elettrodi per fare in modo che eventuali piccole scariche verso terra producano solo piccolissime variazioni di tensione sugli elettrodi stessi. Risultano così ridotti ad ampiezza trascurabile gli impulsi indotti sull'elettrodo collettore da tali scariche.

Lo schermaggio, dall'uscita dei filtri alla camera, deve essere completo: in caso contrario disturbi di rete, accensioni di strumenti estranei, di macchine, ecc., danno impulsi sull'elettrodo collettore.

L'amplificazione è ottenuta con un preamplificatore mod. 100 e un amplificatore mod. 100 (6). L'amplificazione totale è di 10^6 e la frequenza superiore

(6) N. ELMORE e M. SANDS: *Electronics: Experimental Techniques* (McGraw Hill, 1949).

di taglio è di 700 kHz. Il preamplificatore è montato direttamente sulla camera. La RC di ingresso è dell'ordine di circa $2 \cdot 10^{-4}$ s. Tra preamplificatore e amplificatore è inserita la costante di tempo $T_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ s.

I discriminatori sono del tipo Shmitt⁽⁶⁾. Essi avevano originariamente una « isteresi » di 4 V che è stata portata a 12 per evitare che un impulso registrato potesse far scattare due o più volte il discriminatore: ciò può avvenire quando siano presenti numerosi impulsi piccoli dovuti, ad esempio, a radiazioni γ sovrapposte agli impulsi in studio; essi rendono irregolare la discesa dell'impulso che ha fatto scattare il discriminatore e possono determinare, se l'isteresi non è sufficientemente ampia, un secondo scatto del discriminatore.

I due discriminatori sono accoppiabili, nel senso che le relative tensioni di scatto possono essere legate in modo da differire di una quantità costante ΔV . La differenza dei conteggi dei due discriminatori permette quindi mediante successive misure a diversi valori di V , di ricavare la distribuzione in ampiezza degli impulsi emergenti dalla catena di amplificazione. La stabilità della tensione di scatto dei discriminatori è di 0,1-0,2 V per un periodo di lavoro di alcuni giorni. La tensione di scatto veniva periodicamente controllata mediante un generatore di impulsi rettangolari della durata di una decina di microsecondi, la cui altezza variabile da 0 a 50 V è leggibile su uno strumento con l'approssimazione di 0,2 V.

L'osservazione degli impulsi è effettuata mediante un tubo oscillografico postaccelerato a traccia comandata (sincroscopio) e a velocità di passaggio di $1 \mu s^{-1} cm$. Una linea di ritardo a costanti concentrate formata da 4 elementi, ciascuno dei quali introduce $0,5 \mu s$ di ritardo, permette di far partire l'asse x dell'oscilloscopio prima che all'asse y giunga l'impulso in istudio. Si è tarata in tempi la lunghezza misurata sullo schermo del tubo oscillografico, inserendo e disinserendo un elemento di detta linea.

5. - Lo studio delle proprietà della camera è stato condotto usando le particelle α emesse dagli strati di U descritti nel seguito. Si è studiata l'ampiezza degli impulsi al variare delle tensioni di griglia e di elettrodo emittente rispetto all'elettrodo collettore; la forma e la durata degli impulsi sono state esaminate con il sincroscopio; inoltre, con i due discriminatori accoppiati si sono rilevati gli spettri di ampiezza. La pressione dell'Argon è dell'ordine di 5 atmosfere.

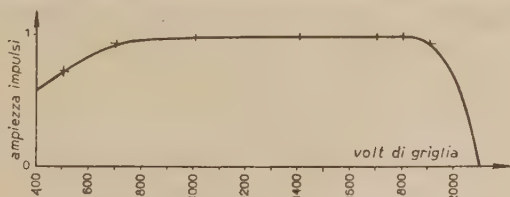


Fig. 4. - Ampiezza degli impulsi in funzione della tensione alla griglia: elettrodo emittente = 2000 Volt.

La fig. 4 rappresenta la curva che dà l'ampiezza degli impulsi in funzione delle tensioni di griglia, fissando la tensione sull'elettrodo emittente. Tale curva è stata rilevata misurando gli impulsi sullo schermo di un oscillografo « Cossor » ed è indice della buona trasparenza della griglia agli elettroni. Le

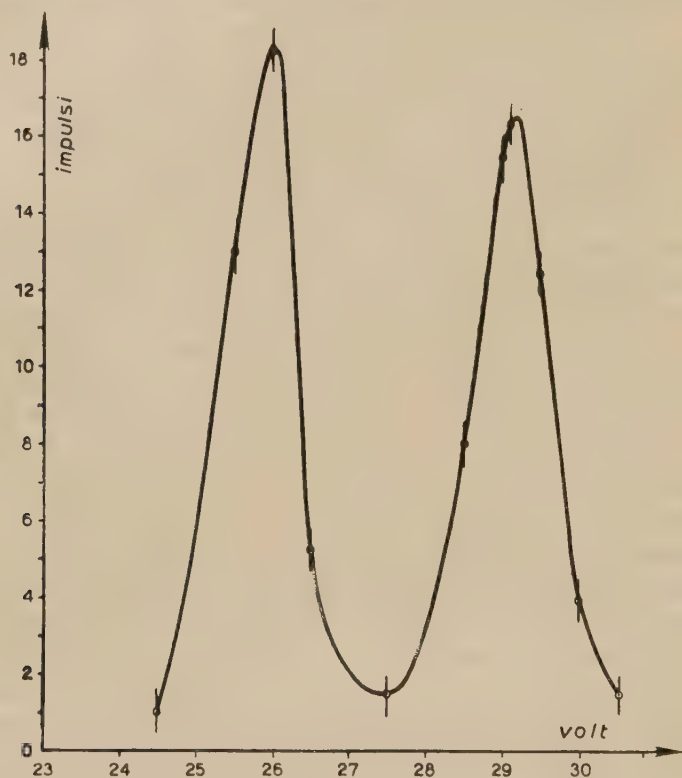


Fig. 5. - Distribuzione spettrale delle particelle dell'Uranio.

tensioni di lavoro sono state fissate rispettivamente a circa -1900 V e a circa -1200 V. Dimezzando tali tensioni l'ampiezza degli impulsi varia solo di qualche percento.

Le curve di fig. 5 e di fig. 6 rappresentano lo spettro di particelle α emesse da uno strato sottile di U e lo spettro di particelle α e H^3 emesse da uno strato sottile di Li irraggiato con neutroni lenti, rilevati con due discriminatori accoppiati come sopra detto.

6. - La disposizione della paraffina e della sorgente di neutroni è illustrata nella fig. 7.

La sorgente di neutroni è costituita da $0,5$ g di Ra mescolato con Be; tra la sorgente e la camera è interposto uno strato di circa 10 cm di Pb necessario

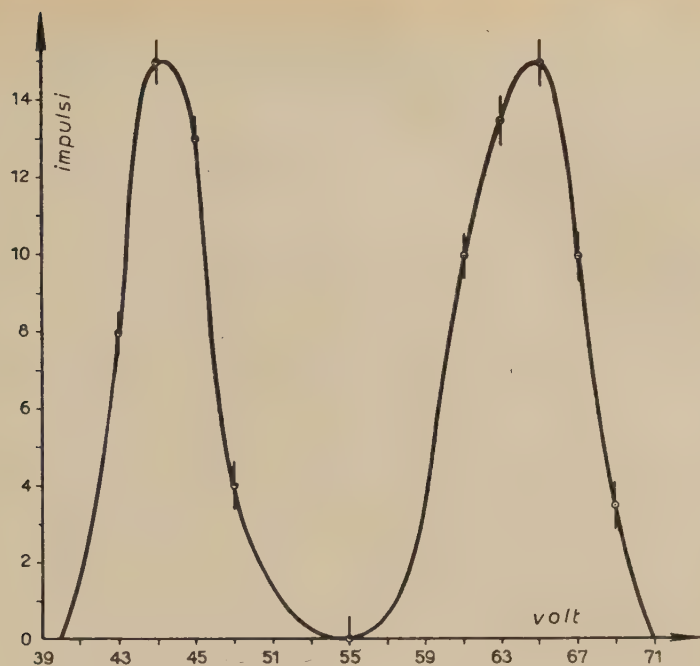


Fig. 6. - Distribuzione spettrale delle particelle α e H^3 della reazione $Li^6(n, \alpha)H^3$.

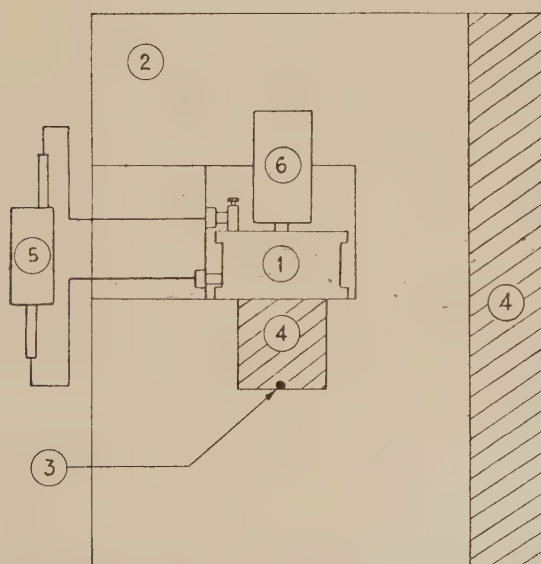


Fig. 7. - Schema dell'insieme: scala 1 : 10. — 1, camera; 2, paraffina; 3, sorgente Ra-Be; 4, piombo; 5, forno calcio; 6, preamplificatore.

per ridurre il livello di disturbo generato nella camera dai raggi γ del Ra. Si è controllato per mezzo di conteggi delle particelle α dell'U che i γ non alterano nè l'ampiezza degli impulsi α nè comunque influenzano il numero di α conteggiate fino ad energie di 0,7-0,8 MeV.

Circondando la camera con uno strato di Cd dello spessore di 0,8 mm si ottiene il contributo alle fissioni dovuto ai neutroni epitermici e veloci.

Nel corso delle misure sugli strati di Li che comportano conteggi ed energie fra 1 e 2 MeV, oltre alle particelle dovute a fissioni del Li si sono osservati anche protoni di rinculo per urto di neutroni veloci. Tali protoni sono dovuti alla presenza di Idrogeno nell'Argon.

Si ha motivo di ritenere che il Ca, se scaldato sopra i 300 °C, emetta Idrogeno prodottovi dalla decomposizione dell'idruro di Calcio. Difatti il numero di tali protoni si è visto aumentare portando il forno a 500 °C. Una buona degassazione preventiva sotto vuoto del Ca riduce già in grado notevole tale inconveniente. Per ridurlo ulteriormente e soprattutto per evitare che possa variare il numero dei protoni durante la misura con e senza Cd, si è seguito il seguente procedimento con ogni strato di Li usato:

- 1) degassazione sotto vuoto del Ca a 500 °C;
- 2) raffreddamento sotto vuoto del Ca;
- 3) riempimento con Argon a 5 atmosfere;
- 4) circolazione per qualche ora a 300 °C fino a che gli impulsi dovuti ai gruppi di α e H^3 del Li raggiungono l'altezza di saturazione;
- 5) spegnimento del forno.

7. - Gli strati di U sono stati preparati dal nostro laboratorio chimico mediante deposizione elettrolitica su dischi di acciaio di 5 cm di diametro ⁽⁷⁾.

Gli strati di Li sono stati ottenuti per evaporazione sotto vuoto di LiF. Il supporto è costituito da un disco di acciaio inossidabile lavorato otticamente, del tipo di quelli usati per l'U. Lo spessore degli strati è stato dosato con metodo interferometrico e il loro peso determinato con una microbilancia. Per questo si è accuratamente pesato il supporto prima e dopo l'evaporazione; due pesate di un disco dello stesso tipo su cui non veniva effettuata alcuna operazione servivano a correggere eventualmente la taratura della microbilancia dato che le due pesate utili erano separate dall'intervallo di tempo di circa 1 ora necessario per le operazioni di evaporazione; si è avuto cura di essiccare e di mantenere in ambiente secco i supporti durante tutte le operazioni di evaporazione e di pesata.

Sono stati preparati 5 dischi con strati di Li; 3 di essi sono stati pesati con una microbilancia di minor precisione e pertanto l'errore relativo sul peso

⁽⁷⁾ E. ZIMMER: *Nuovo Cimento*, **7**, 520 (1950).

è più grande che per gli altri due. Il LiF usato è proveniente da due diversi laboratori; in entrambi i casi è stato preparato con Li_2CO_3 e HF ritenuti purissimi.

Una riprova indiretta della attendibilità delle pesate e dei relativi errori probabili è costituita dal fatto che i conteggi delle fissioni del Li per mg, concordano per i 5 strati.

8. — Ogni strato di Li è controllato a mezzo dello spettro dei prodotti di fissione, del Li (fig. 6). Tali spettri permettono una conferma sulla omogeneità dello strato basata sulla larghezza delle righe e servono a tarare in MeV la scala del discriminatore integrale, essendo note con sufficiente approssimazione, per il nostro scopo, le energie corrispondenti ai due massimi della curva spettrale.

Si sono assunti i valori ⁽⁸⁾:

$$E_{\alpha} = 2,02 \text{ MeV}, \quad E_{\text{H}^3} = 2,68 \text{ MeV}, \quad E_{\text{H}^3}/E_{\alpha} = 1,33.$$

Si sono eseguiti conteggi a tensioni di taglio corrispondenti ad energie variabili da 0,8 a 1,5 MeV. Come si è detto tali valori di energie entrano nelle formule di correzione attraverso i percorsi corrispondenti (n. 2). Le curve percorso-energia usate sono quelle per l'aria, essendosi assunto uguale a 1 il rapporto dei poteri frenanti aria-LiF. Per le particelle α le curve sono note, per gli H^3 si sono calcolate da quelle pure note dei protoni.

Nelle tabelle I a VI sono raccolti risultati delle misure eseguite sui 5 strati di LiF. Il buon accordo fra il numero di fissioni totali di ogni strato (valori corretti) a diverse energie ci ha dato riprova della attendibilità delle correzioni di autoassorbimento e di retrodiffusione. I valori ottenuti con il Cd intorno alla camera non possono servire a dare indicazioni sul flusso di neutroni epitermici in quanto, come si è detto (n. 6), comprendono anche impulsi dovuti a protoni di rinculo.

⁽⁸⁾ J. K. BOGGILD e L. MINNEHAGEN: *Phys. Rev.*, **75**, 782 (1949).

TABELLA I. - *Strato di LiF N. 1.*

Peso = mg $3,55 \pm 0,04$; superficie = $19,62 \text{ cm}^2$; rapporto: $E_{\text{H}^3}/E_{\alpha}$ (misurato) = $1,375$.

Energia di taglio E MeV	Impulsi per minuto (senza Cd) N_1	Impulsi per minuto (con Cd) N_2	Impulsi per minuto per neutroni termici $N(E) = N_1 - N_2$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	Impulsi totali per minuto $N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E)$
0,98	272,48	22,24	$250,24 \pm 0,8 \%$	$1,062 \pm 0,4 \%$	$265,75 \pm 2,2$
1,06	270,24	23,36	$246,88 \pm 1,1 \%$	$1,070 \pm 0,4 \%$	$264,16 \pm 3$
1,14	267,68	20,80	$246,88 \pm 1,1 \%$	$1,078 \pm 0,4 \%$	$266,13 \pm 3$
1,30	264,48	19,68	$244,80 \pm 1,1 \%$	$1,100 \pm 0,4 \%$	$269,28 \pm 3$
1,42	261,92	20,48	$241,44 \pm 1,1 \%$	$1,130 \pm 0,4 \%$	$272,82 \pm 3,2$

Valore medio ponderato = $267,30 \pm 2,2$.

TABELLA II. - *Strato di LiF N. 2.*

Peso = mg $1,29 \pm 0,025$; superficie = $19,62 \text{ cm}^2$; rapporto $E_{\text{H}^3}/E_{\alpha}$ (misurato) = $1,54$.

Energia di taglio E MeV	Impulsi per minuto (senza Cd) N_1	Impulsi per minuto (con Cd) N_2	Impulsi per minuto per neutroni termici $N(E) = N_1 - N_2$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	Impulsi totali per minuto $N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E)$
0,93	111,20	19,84	$91,36 \pm 1 \%$	$1,01 \pm 0,3 \%$	$92,27 \pm 0,15$
1,11	109,76	16,96	$92,80 \pm 1,3 \%$	$1,015 \pm 0,3 \%$	$94,19 \pm 1,1$

Valore medio ponderato = $92,90 \pm 1$.

TABELLA III. - *Strato di LiF N. 3.*

Peso = mg $2,05 \pm 0,1$; superficie = $19,62 \text{ cm}^2$; rapporto $E_{\text{H}^3}/E_{\alpha}$ (misurato) = $1,39$.

Energia di taglio E MeV	Impulsi per minuto (senza Cd) N_1	Impulsi per minuto (con Cd) N_2	Impulsi per minuto per neutroni termici $N(E) = N_1 - N_2$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	Impulsi totali per minuto $N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E)$
0,846	168,64	21,28	$147,36 \pm 1,3 \%$	$1,024 \pm 0,3 \%$	$150,89 \pm 1,95$
1,01	163,36	20,80	$142,56 \pm 1,2 \%$	$1,029 \pm 0,3 \%$	$146,69 \pm 1,83$
1,18	160,32	18,40	$141,92 \pm 1,2 \%$	$1,040 \pm 0,3 \%$	$147,59 \pm 1,84$
1,35	156,96	16,—	$140,96 \pm 1,25 \%$	$1,053 \pm 0,3 \%$	$148,43 \pm 1,92$

Valore medio ponderato = $148,3 \pm 1,4$.

TABELLA IV. - *Strato di LiF N. 4.*

Peso = mg $2,08 \pm 0,1$; superficie = $19,62 \text{ cm}^2$; rapporto E_{H^3}/E_a (misurato) 1° ciclo di misura = $1,40$, 2° ciclo = $1,33$.

Energia di taglio E MeV	Impulsi per minuto (senza Cd) N_1	Impulsi per minuto (con Cd) N_2	Impulsi per minuto per neutroni termici $N(E) = N_1 - N_2$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	Impulsi totali per minuto $N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E)$
<i>I ciclo:</i>					
0,95	170,—	36,40	$133,60 \pm 1,4 \%$	$1,028 \pm 0,3 \%$	$137,34 \pm 1,92$
1,12	161,12	30,72	$130,40 \pm 1,5 \%$	$1,037 \pm 0,3 \%$	$135,22 \pm 2,—$
1,30	156,64	25,12	$131,52 \pm 1,3 \%$	$1,051 \pm 0,3 \%$	$138,22 \pm 1,8$
1,46	148,80	22,56	$126,24 \pm 1,4 \%$	$1,068 \pm 0,3 \%$	$134,82 \pm 1,9$
Valore medio ponderato =					$136,50 \pm 1,5$
<i>II ciclo:</i>					
0,96	147,68	14,56	$133,12 \pm 1 \%$	$1,028 \pm 0,3 \%$	$136,84 \pm 1,41$
1,10	145,92	13,60	$132,32 \pm 1,3 \%$	$1,034 \pm 0,3 \%$	$136,81 \pm 1,73$
1,32	141,12	12,16	$128,96 \pm 1,4 \%$	$1,052 \pm 0,3 \%$	$135,66 \pm 1,89$

Valore medio ponderato = $136,50 \pm 1,1$.

TABELLA V. - *Strato di LiF N. 5.*

Peso = mg $2,08 \pm 0,1$; superficie = $19,62 \text{ cm}^2$; rapporto E_{H^3}/E_a (misurato) = $1,39$.

Energia di taglio E MeV	Impulsi per minuto (senza Cd) N_1	Impulsi per minuto (con Cd) N_2	Impulsi per minuto per neutroni termici $N(E) = N_1 - N_2$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	Impulsi totali per minuto $N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E)$
0,846	168,64	22,40	$146,24 \pm 1,3 \%$	$1,024 \pm 0,3 \%$	$149,75 \pm 1,94$
1,01	164,48	21,28	$143,20 \pm 1,8 \%$	$1,029 \pm 0,3 \%$	$147,35 \pm 2,64$
1,18	163,04	18,72	$144,32 \pm 1,2 \%$	$1,040 \pm 0,3 \%$	$150,10 \pm 1,87$
1,35	157,44	17,12	$141,92 \pm 1,5 \%$	$1,053 \pm 0,3 \%$	$149,44 \pm 2,20$

Valore medio ponderato = $149,4 \pm 1,6$.

TABELLA VI. - *Dati sui 5 strati di LiF.*

Numero dello strato	Peso mg	Fissioni: impulsi al minuto	Fissioni per mg e per minuto
Li N. 1	$3,55 \pm 0,04$	$267,30 \pm 2,2$	$75,30 \pm 1$
Li N. 2	$1,29 \pm 0,025$	$92,90 \pm 1$	$72,00 \pm 1,5$
Li N. 3	$2,05 \pm 0,1$	$148,30 \pm 1,4$	$72,34 \pm 3,6$
Li N. 4	$2,08 \pm 0,1$	$136,50 \pm 1,1$	$65,62 \pm 3,3$
Li N. 5	$2,08 \pm 0,1$	$149,40 \pm 1,6$	$71,82 \pm 3,6$

Valore medio ponderato = $73,52 \pm 1,2 \%$.

9. - Per le misure sull'U si sono usati 2 strati di U per ognuno dei quali è stato rilevato (fig. 5) lo spettro delle α la cui energia è ben nota ⁽⁹⁾:

$$E_{U_I} = 4,21 \text{ MeV}, \quad E_{U_{II}} = 4,75 \text{ MeV}.$$

Gli spettri hanno servito come già per il Li, a tarare la scala del discriminatore e verificare l'omogeneità dello strato. Come si è detto precedentemente (n. 1) la quantità di U presente nello strato è stata determinata mediante il conteggio delle particelle α : il numero di particelle α per minuto e per mg è stato misurato recentemente con grande precisione da KIENBERGER ⁽¹⁰⁾ ed è $1502 \pm 1 \text{ } ^0_{00} \text{ mg}^{-1} \text{ min}^{-1}$.

Il conteggio delle particelle α è stato fatto con i criteri esposti, e cioè a valori diversi di taglio, nel campo di energie da 1 a 3 MeV. Le correzioni di autoassorbimento e retrodiffusione si sono fatte secondo la formula (4). Si sono prese le curve percorso-energia per le α in piombo assumendo uguale a 1 il rapporto dei poteri frenanti fra Pb e $\text{UO}_3(\text{H}_2\text{O})$ ⁽¹¹⁾ e la funzione $\Psi(E)$ si è calcolata alle diverse energie applicando la formula (3). I risultati delle misure e dei calcoli sono raccolti nelle tabelle VII e VIII.

TABELLA VII. - *Strato di U N. 1 - Conteggi di α .*

Peso $\sim 1,57 \text{ mg}$ di U; superficie = $19,6 \text{ cm}^2$; rapporto energia U_{II} e $U_I = 1,138$.

Energia di taglio MeV	Impulsi/minuto $N(E)$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	$N_\alpha = N(E)\varepsilon(E)$
1,93	$1176,8 \pm 0,65 \%$	1,99	$2341,8 \pm 16$
2,89	$1156,8 \pm 0,65 \%$	2	$2313,6 \pm 16$

Valore medio ponderato $2327,7 \pm 0,65 \%$.

TABELLA VIII. - *Strato di U N. 6 - Conteggi di α .*

Peso $\sim 2,3 \text{ mg}$ di U; superficie = $19,6 \text{ cm}^2$; rapporto energia U_{II} e $U_I = 1,126$.

Energia di taglio MeV	Impulsi/minuto $N(E)$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	$N_\alpha = N(E)\varepsilon(E)$
1,066	$1711,2 \pm 0,35 \%$	1,990	$3405,3 \pm 12$
1,600	$1705,6 \pm 0,62 \%$	1,993	$3399,3 \pm 21$
2,132	$1678,7 \pm 0,5 \%$	2,000	$3357,4 \pm 17$
3,200	$1664,0 \pm 0,68 \%$	2,016	$3354,6 \pm 23$

Valore medio ponderato $3385,4 \pm 0,35 \%$.

⁽⁹⁾ Carta di SEGRÈ.

⁽¹⁰⁾ C. A. KIENBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 1561 (1949).

⁽¹¹⁾ Formula chimica presunta per lo strato di U.

I conteggi delle fissioni dell'U si sono fatti ad energie da 12 a 24 MeV essendo la taratura della scala del discriminatore effettuata con le particelle α dell'U stesso. Essendo la frequenza di conteggio bassa (1 fissione/minuto) la misura è durata circa 100 ore e si è avuto cura di verificare, mediante gli spettri delle particelle α , che durante il tempo di misura non fossero avvenute variazioni che spostassero il valore di taglio in MeV. Inoltre per controllare che non si registrassero impulsi spuri (scariche, sovrapposizioni di impulsi α e γ , ecc.) si sono fatte una trentina di ore di misura agli stessi valori di taglio irraggiando la camera con un ugual quantità di Ra non mescolato con Be. Sono stati in tutto registrati 4 impulsi che riteniamo corrispondano a fissioni spontanee.

Sui conteggi delle fissioni è stata apportata la correzione di autoassorbimento secondo la formula (6). Le curve percorso-energia impiegate sono quelle note per i prodotti di fissione in aria ridotte per mezzo del potere frenante relativo aria- U_3O_8 ⁽¹²⁾. Le misure sono state fatte al solito con e senza Cd intorno alla camera e i risultati sono raccolti nelle tabelle IX e X.

TABELLA IX. — Strati di Uranio N. 1 e N. 6. Conteggi di fissioni.

Energia di taglio E MeV	Impulsi per minuto (senza Cd) N_1	Impulsi per minuto (con Cd) N_2	Impulsi per minuto per neutroni termici $N(E) = N_1 - N_2$	Fattore di correzione $\varepsilon(E)$	Impulsi totali per minuto $N_0 = N(E) \cdot \varepsilon(E)$
N. 1:					
13,86	0,847	0,103	$0,744 \pm 3,57 \%$	1,0084	$0,750 \pm 0,026 \%$
22,18	0,818	0,099	$0,718 \pm 3,4 \%$	1,011	$0,726 \pm 0,024 \%$
			Valore medio ponderato = $0,738 \pm 3,5 \%$		
N. 6:					
11,62	1,2095	0,1439	$1,0656 \pm 2,2 \%$	1,0113	$1,077 \pm 2,2 \%$

TABELLA X. — Dati sugli strati di Uranio.

Numero dello strato	N. di α /minuto N_α	N. di fissioni al min. N_s	Fissioni per mg di U $S_U = 1502 \cdot N_s / N_\alpha$
UO_3 N. 1	2327 ± 151	$0,738 \pm 0,026$	$0,4763 \pm 0,017$
UO_3 N. 6	$3385,7 \pm 118$	$1,077 \pm 0,024$	$0,4778 \pm 0,010$

Valore medio ponderato = $0,4774 \pm 1,9 \%$.

(12) E. SEGRÈ e C. WIEGAND: *Phys. Rev.*, **70**, 808 (1946).

TABELLA XI. - *Sommario di risultati sulle sezioni d'urto.*

AUTORI	RISULTATO (barns)	METODO
E. FERMI, J. MARSHALL e L. MARSHALL (<i>Phys. Res.</i> , 72 , 193 (1947))	$\sigma_B = 703$ $\sigma_{Li} = 65$ ⁽¹³⁾	Spettrografo
F. FENNING, G. GRAHAM e H. SELIGMAN (<i>Can. Journ. of Res.</i> , 25 , 73 (1947))	$\frac{\sigma_{Li}}{\sigma_B} = 0,0948 \pm 0,0013$	Distribuzione dei neutroni in soluzioni di H ₂ O con Li e B.
W. W. HAVENS e J. RAINWATER (<i>Bull. Am. Phys. Soc.</i> , 21 (3), 13 (1946))	$\sigma_{Li} = 72$ $\sigma_B = 740$	Spettrografo.
R. B. SUTTON, B. D. McDANIEL, E. E. ANDERSON e L. S. LAVATELLI (<i>Phys. Rev.</i> , 71 , 272 (1947))	$\sigma_B = 732$	Spettrografo.
E. W. TITTERTON (<i>Nature</i> , 163 , 990 (1949))	$\frac{\sigma_{Li}}{\sigma_B} = 0,10 \pm 5 \%$	Conteggi di fissioni in lastre.
G. V. DROSTE (<i>Naturforschung und Medizin in Deutschland</i> , Band 13 <i>Kernphysik</i> , p. 199)	$\frac{\sigma_{Li}}{\sigma_B} = 0,102 \pm 2 \%$	Distribuzione dei neutroni in soluzioni di H ₂ O con Li e B.
G. V. DROSTE (<i>Naturforschung und Medizin in Deutschland</i> , Band 13 - <i>Kernphysik</i> , p. 199)	$\sigma_{U^{235}} = 599 \pm 24$	Confronto con il Li.
S. BISWAS e A. P. PATRO (<i>Indian Journ. of Phys.</i> , 23 , 97 (1949))	$\sigma_{U^{235}} = 505 \pm 10$	Confronto con il B.
CH. HAENNY, P. LERCH e O. ROCHAT (<i>Elv. Phys. Acta</i> , 22 , 609 (1949))	$\sigma_{U^{235}} = 580 \pm 120$	Confronto con il B.

10. - Coi valori elencati nelle tabelle VI e X e con la formula (1) si ottiene

$$\sigma_U/\sigma_{Li} = 0,0596 \pm 2,5 \%$$

I valori pubblicati per la σ_{Li} all'energia 0,025 eV sono raccolti nella tab. XI.

⁽¹³⁾ Ne danno notizie gli autori H. G. HEReward e coll.: *Can. Journ. of Res.*, **25**, 26 (1947).

Per l'esame di tali valori è bene distinguere quelli ottenuti sotto forma di rapporti $\sigma_{\text{Li}}/\sigma_{\text{B}}$ dove σ_{B} è la sezione di cattura del boro, da quelli ottenuti direttamente mediante lo spettrometro a tempo di volo. In tale tabella riportiamo anche alcune fra le più recenti determinazioni di σ_{B} . Abbiamo assunto il valore di σ_{Li} che si ottiene prendendo per il rapporto $\sigma_{\text{Li}}/\sigma_{\text{B}}$ il valore dato da FENNING e collaboratori e per il valore di σ_{B} quello dato da FERMI e collaboratori. Si ottiene, alla velocità di 2200 ms^{-1} , $\sigma_{\text{Li}} = 66,6 \pm 2 \%$ barns e conseguentemente

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{U}} &= 3,97 \pm 3 \% \text{ barns}, \\ \sigma_{\text{U}^{235}} &= 551 \pm 3 \% \text{ barns}.\end{aligned}$$

Si può osservare che, sul rapporto $\sigma_{\text{U}}/\sigma_{\text{Li}}$, l'errore del 2,5 % tiene conto: degli errori statistici sui conteggi, degli errori sulle pesate degli strati di LiF e degli errori sulle correzioni effettuate, errori che pesano sulla misura finale per circa 4 ‰; invece per la σ_{U} l'errore risulta del 3 % essendosi tenuto conto anche dell'incertezza del 2 % sulla σ_{Li} .

Pure nella tab. XI raccogliamo i valori sinora pubblicati di $\sigma_{\text{U}^{235}}$ ridotti per il confronto col nostro risultato, alla σ_{B} da noi assunta.

Ringraziamo il prof. G. BOLLA per gli utili consigli e il costante aiuto e interessamento, il prof. E. AMALDI e il prof. B. FERRETTI per le frequenti discussioni, il dott. E. ZIMMER per la preparazione degli strati di U, il prof. L. MALATESTA per la preparazione del LiF, l'ing. F. ZANINI e il sig. C. MANGIAROTTI delle Officine Galileo per la preparazione per evaporazione degli strati di LiF.

SUMMARY

The ratio between U fission cross section and Li cross section of the $\text{Li}^6(n, \alpha)\text{H}^3$ reaction for thermal neutrons is determined. The measurement is made exposing a number of Li and U layers to a constant flux of thermal neutrons in an ionization chamber and comparing the number of fission products emitted by U with the number of α and H^3 particles emitted by Li. The number of U nuclei present in each layer is deduced by counting the number of α particles emitted by each layer, whilst the number of Li nuclei is found by accurately weighing the Li layers. Assuming the law $\sigma = \sigma_0 v_0/v$ for the fission thermal cross section of U the ratio $\sigma_{\text{U}}/\sigma_{\text{Li}}$ results $\sigma_{\text{U}}/\sigma_{\text{Li}} = 0,0596 \pm 2,5 \%$. Assuming $\sigma_{\text{Li}} = 66,6 \pm 2 \%$ barns, we get $\sigma_{\text{U}} = 3,97 \pm 0,12$ barns, and for the U^{235} $\sigma_{\text{U}^{235}} = 551 \pm 17$ barns.

Onde elettromagnetiche ordinarie ed evanescenti prodotte da distribuzioni piane di cariche e di correnti.

S. GIBELLATO

Istituto di Fisica dell'Università - Pisa

(ricevuto il 19 Maggio 1950)

Riassunto. — Si considerano onde elettromagnetiche di tipo generale (comprendente le onde ordinarie e le onde evanescenti) a ciascuna delle quali vengono associati due vettori: il vettore di propagazione \mathbf{a}_1 e il vettore di attenuazione \mathbf{a}_2 mediante i quali si studiano alcune sue proprietà. Se una tale onda incide su di un piano perfettamente conduttore, induce su questo delle correnti \bar{j} e delle cariche σ che, impedendole di propagarsi oltre, danno origine ad un'onda riflessa. Questo vuol dire che la \bar{j} e la σ producono in un semispazio l'onda riflessa e nell'altro un'onda uguale a quella incidente ma con fase opposta. Riferito il piano delle cariche ad un sistema di assi ortogonali opportunamente orientati x, y , la \bar{j} e la σ risultano dipendere dal tempo t e dalle coordinate mediante un fattore $\cos nu(t - x/u)$, esse si spostano quindi con una velocità di fase u secondo l'asse x , velocità che può variare da zero all'infinito. Il campo da esse prodotto è rappresentato da due onde che sono evanescenti od ordinarie a seconda che $|u|$ è minore o maggiore di $1/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Premessa.

Le equazioni di Maxwell, scritte per un mezzo dielettrico privo di perdite, ammettono soluzioni, che, a seconda dei parametri che le caratterizzano, possono essere interpretate come onde elettromagnetiche ordinarie o come onde elettromagnetiche evanescenti. Verso queste ultime si è recentemente risvegliato l'interesse dei ricercatori; ciò è dovuto sia all'evoluzione della tecnica delle microonde, che ha reso facilmente osservabili i fenomeni che esse presentano, sia al diffondersi dell'interpretazione dei campi prodotti nella diffrazione delle onde elettromagnetiche come serie o integrali di onde ordinarie

ed evanescenti ⁽¹⁾. Nella presente nota si è perciò ritenuto opportuno considerare onde elettromagnetiche di tipo generale, comprendente tanto le onde ordinarie quanto le onde evanescenti, associando a ciascuna due vettori, con i quali se ne possono descrivere le principali proprietà: il vettore di propagazione \mathbf{a}_1 e il vettore di attenuazione \mathbf{a}_2 . Si è riconosciuto che se un'onda di tipo generale incide su un piano perfettamente conduttore, determina su di esso un fluire di correnti, di densità \bar{j} , e una distribuzione di cariche, di densità σ , e che, tanto la \bar{j} quanto la σ dipendono dal tempo t e da un'ascissa x (intersezione del piano conduttore col piano d'incidenza) secondo un fattore del tipo $\cos nu(t - x/u)$. Le due densità si muovono dunque sul piano conduttore, nella direzione x con la velocità u (velocità di fase), che può assumere valori compresi fra zero e infinito. Il fatto, che l'onda incidente non si propaga oltre il piano conduttore, ma viene riflessa, può essere interpretato così: la distribuzione delle correnti e delle cariche, cui sopra si è accennato, dà luogo alla formazione di due onde elettromagnetiche nei due semispazi, da bande opposte del piano conduttore; precisamente nel semispazio entro il quale si propaga l'onda incidente produce l'onda riflessa, nell'altro semispazio produce un'onda uguale a quella incidente ma con fase opposta. Tali onde sono evanescenti od ordinarie, secondo che il modulo della velocità $|u|$ è minore o maggiore di $1/\sqrt{\epsilon\mu}$. I risultati raggiunti nel presente lavoro saranno utilizzati in una prossima nota per il calcolo del campo elettromagnetico prodotto da distribuzioni piane di cariche e di correnti, previo il loro sviluppo in serie od integrale di Fourier.

I. — ONDE ELETTROMAGNETICHE DI TIPO GENERALE.

1. — Deduzione delle equazioni di un'onda elettromagnetica di tipo generale.

Nel presente lavoro considereremo unicamente quei campi le cui componenti dipendono dal tempo t e dalle coordinate ortogonali x, y, z mediante un fattore $\exp[i\omega(t - px - qy - rz)]$, in cui: ω è una costante reale positiva, p, q, r sono delle costanti complesse. In un mezzo privo di perdite, il campo corrispondente ad una data quaterna ω, p, q, r , può rappresentare, a seconda dei valori delle costanti, un'onda ordinaria od un'onda evanescente. Diremo quindi che detto campo rappresenta un'onda elettromagnetica di tipo generale.

Dapprima supporremo $q = 0$. Il caso in cui $q \neq 0$ sarà studiato nel n. 9.

⁽¹⁾ Su tale principio è basato, ad esempio, il « principio dell'interferenza inversa » di TORALDO DI FRANCIA, come si può vedere sul suo *Rapporto critico... sulle leggi generali della diffrazione*, in *Nuovo Cimento*, 5, 591 (1948). Su questo Rapporto si troverà anche una bibliografia sulle onde evanescenti.

Impiegando il sistema Giorgi, le equazioni del campo elettromagnetico in un mezzo dielettrico omogeneo privo di perdite sono:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned} \right. & \text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \end{aligned} \right. \\
 \text{(III)} \quad & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, & \text{(IV)} \quad & \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,
 \end{aligned}$$

dove ε , μ sono rispettivamente la permittività e la permeabilità che si suppongono costanti nel tempo e nello spazio; E_x , E_y , E_z ; H_x , H_y , H_z sono rispettivamente le componenti del campo elettrico e di quello magnetico rispetto ad un sistema di assi ortogonali x , y , z .

Cercheremo dunque delle soluzioni delle equazioni precedenti del tipo:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_x^0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\
 E_y &= E_y^0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\
 E_z &= E_z^0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\
 H_x &= H_x^0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\
 H_y &= H_y^0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\
 H_z &= H_z^0 \exp [i\omega(t - px - rz)],
 \end{aligned}$$

in cui: E_x^0 , E_y^0 , E_z^0 , H_x^0 , H_y^0 , H_z^0 , sono delle costanti in generale complesse. Conveniamo di attribuire significato fisico solo alla parte reale di dette componenti. Sostituendo le espressioni precedenti nella (I) e nella (II), si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} i\omega r E_y^0 &= -i\omega \mu H_x^0, \\ -i\omega r E_x^0 + i\omega p E_z^0 &= -i\omega \mu H_y^0, \\ -i\omega p E_y^0 &= -i\omega \mu H_z^0, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} i\omega r H_y^0 &= i\omega \varepsilon E_x^0, \\ -i\omega r H_x^0 + i\omega p H_z^0 &= i\omega \varepsilon E_y^0, \\ -i\omega p H_y^0 &= i\omega \varepsilon E_z^0. \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni si possono riunire in due gruppi:

$$\left\{ \begin{aligned} r H_y^0 &= \varepsilon E_x^0, \\ p H_y^0 &= -\varepsilon E_z^0, \\ r E_x^0 - p E_z^0 &= \mu H_y^0, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} r E_y^0 &= -\mu H_x^0, \\ p E_y^0 &= \mu H_z^0, \\ r H_x^0 - p H_z^0 &= -\varepsilon E_y^0. \end{aligned} \right.$$

Le due prime equazioni del primo gruppo danno:

$$E_x^0 = -\frac{r}{p} E_z^0; \quad H_y^0 = -\frac{\varepsilon}{p} E_z^0;$$

sostituendo nella terza si ha:

$$-\frac{r^2}{p} E_z^0 - p E_z^0 = -\mu \frac{\varepsilon}{p} E_z^0,$$

cioè: $p^2 + r^2 = \varepsilon\mu$.

Analogamente, dal secondo gruppo si ottiene:

$$H_x^0 = -\frac{r}{p} H_z^0; \quad E_y^0 = \frac{\mu}{p} H_z^0; \quad p^2 + r^2 = \varepsilon\mu.$$

Si vede poi che, con le condizioni stabilite, vengono verificate anche la (III) e la (IV). Ponendo:

$$E_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{p} E_z^0, \quad H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{p} H_z^0,$$

si può concludere che le equazioni (I), (II), (III), (IV) ammettono le soluzioni:

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} E_x = \frac{-r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], & H_x = \frac{-r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\ E_z = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], & H_z = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\ H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], & E_y = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \end{array} \right.$$

in cui:

$$(1') \quad p^2 + r^2 = \varepsilon\mu.$$

Le (1), ove si ponga $H_0 = 0$, si riducono al gruppo di tre equazioni che sta a sinistra (primo gruppo); se invece si pone $E_0 = 0$ si riducono a quello di destra (secondo gruppo). Questi due gruppi rappresentano ciascuno una soluzione, quella dell'uno indipendente da quella dell'altro, e la soluzione generale (1) si può pensare come data dalla loro sovrapposizione.

2. - Vettore di propagazione e vettore di attenuazione.

Poniamo:

$$p = p_1 + ip_2, \quad r = r_1 + ir_2,$$

in cui p_1, p_2, r_1, r_2 sono delle costanti reali. Per studiare le proprietà dell'onda (1) è molto utile introdurre due vettori:

il vettore di propagazione \mathbf{a}_1 avente le componenti $p_1, 0, r_1$, secondo gli assi x, y, z ;

il vettore di attenuazione \mathbf{a}_2 di componenti $-p_2, 0, -r_2$.

Indicando con O l'origine delle coordinate e con P il punto di coordinate x, y, z , l'esponenziale:

$$\exp [i\omega(t - px - rz)]$$

diventa:

$$\begin{aligned} \exp [i\omega(t - p_1x - r_1z) + \omega(p_2x + r_2z)] = \\ = \exp [i\omega(t - (P - O) \times \mathbf{a}_1) - \omega(P - O) \times \mathbf{a}_2]. \end{aligned}$$

Poichè ogni componente del campo è data dal prodotto di una costante per l'esponenziale sopra scritto, per un dato punto P essa risulta funzione sinusoidale del tempo di frequenza $f = \omega/2\pi$. I piani $(P - O) \times \mathbf{a}_2 = \text{cost.}$, normali ad \mathbf{a}_2 , sono per essa piani di uguale ampiezza e il gradiente dell'ampiezza ha la stessa direzione ma il verso opposto di \mathbf{a}_2 . Per un dato tempo t i piani $-(P - O) \times \mathbf{a}_1 = C_1 = \text{cost.}$ sono piani di ugual fase per ogni componente del campo. Inoltre la fase che si aveva al tempo t sul piano $-(P - O) \times \mathbf{a}_1 = C_1$, si ha al tempo $t + dt$ sul piano $-(P - O) \times \mathbf{a}_1 = C_1 - dt$. Indicando dunque con P_1 un punto del primo piano, con P_2 uno del secondo, è:

$$-(P_1 - O) \times \mathbf{a}_1 = C_1, \quad -(P_2 - O) \times \mathbf{a}_1 = C_1 - dt.$$

La distanza dh tra i due piani, orientata concordemente con \mathbf{a}_1 , è:

$$\begin{aligned} dh = (P_2 - P_1) \times \text{vers } \mathbf{a}_1 = [-(P_1 - O) + (P_2 - O)] \times \text{vers } \mathbf{a}_1 = \\ = \frac{[-(P_1 - O) \times \mathbf{a}_1] - [-(P_2 - O) \times \mathbf{a}_1]}{a_1} = \frac{dt}{a_1}. \end{aligned}$$

Dunque nel tempo dt una data fase si sposta di $dh = dt/a_1$ secondo \mathbf{a}_1 , questo vuol dire che essa si muove con una velocità

$$\bar{v} = \frac{dh}{dt} \text{vers } \mathbf{a}_1 = \frac{\text{vers } \mathbf{a}_1}{a_1}.$$

Dalle considerazioni fatte risulta che la (1) rappresenta un'onda piana ⁽²⁾ che si propaga secondo \mathbf{a}_1 , con una velocità di modulo $1/a_1$ mentre la sua ampiezza decresce esponenzialmente secondo \mathbf{a}_2 .

Per calcolare il campo del vettore di Poynting S dell'onda (1) dovremo

⁽²⁾ SCHAEFER e GROSS riportano nella fig. 2 (nel semispazio $z > 0$) del loro articolo *Untersuchungen über die Totalreflexion*, in *Ann. d. Phys.*, **32**, 648 (1910) la rappresentazione grafica del vettore magnetico H e del vettore di Poynting S , relativo all'onda (1) nel caso in cui: $E_0 = 0, r_1 = 0, p_2 = 0$.

considerare la sola parte reale delle componenti. Per semplicità supporremo dapprima E e H reali. Si ottiene:

$$\begin{aligned} S_x &= E_y H_z - E_z H_y = \frac{\varepsilon E_0^2 + \mu H_0^2}{\varepsilon \mu} [p_1 \cos^2 \omega(t - p_1 x - r_1 z) - \\ &\quad - p_2 \cos \omega(t - p_1 x - r_1 z) \sin \omega(t - p_1 x - r_1 z)] \exp [2\omega(p_2 x + r_2 z)], \\ S_y &= E_z H_x - E_x H_z = 0, \\ S_z &= E_x H_y - E_y H_x = \frac{\varepsilon H_0^2 + \mu H_0^2}{\varepsilon \mu} [r_1 \cos^2 \omega(t - p_1 x - r_1 z) - \\ &\quad - r_2 \cos \omega(t - p_1 x - r_1 z) \sin \omega(t - p_1 x - r_1 z)] \exp [2\omega(p_2 x + r_2 z)]. \end{aligned}$$

Questi risultati si possono sintetizzare usando la forma vettoriale:

$$S = \frac{\varepsilon E_0^2 + \mu H_0^2}{\varepsilon \mu} [\mathbf{a}_1 \cos^2 \omega(t - p_1 x - r_1 z) + \\ + \mathbf{a}_2 \cos \omega(t - p_1 x - r_1 z) \sin \omega(t - p_1 x - r_1 z)] \exp [2\omega(p_2 x + r_2 z)].$$

Il vettore di Poynting risulta essere una funzione periodica del tempo di periodo $T = \pi/\omega$, ed essere costituita di due parti: l'una diretta secondo \mathbf{a}_1 , che pulsa mantenendo sempre lo stesso segno e l'altra diretta secondo \mathbf{a}_2 , che per mezzo periodo è positiva e per mezzo è negativa. Per un dato punto, la media temporale del vettore di Poynting risulta essere:

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \mathbf{a}_1 \frac{\varepsilon E_0^2 + \mu H_0^2}{2\varepsilon \mu} \exp [2\omega(p_2 x + r_2 z)]$$

che ha la direzione della velocità di fase \bar{v} .

In generale se E_0 e H_0 sono complessi, si possono mettere nella forma:

$$E_0 = |E_0| \exp [i\omega\varphi_E], \quad H_0 = |H_0| \exp [i\omega\varphi_H],$$

dove $|E_0|$, $|H_0|$, φ_E , φ_H sono dei numeri reali. Si trova allora:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \frac{|E_0|^2}{\mu} (\mathbf{a}_1 \cos^2 \omega(t - p_1 x - r_1 z + \varphi_E) + \right. \\ &\quad + \mathbf{a}_2 \cos \omega(t - p_1 x - r_1 z + \varphi_E) \sin \omega(t - p_1 x - r_1 z + \varphi_E) + \\ &\quad + \frac{|H_0|^2}{\varepsilon} \mathbf{a}_1 \cos^2 \omega(t - p_1 x - r_1 z + \varphi_H) + \\ &\quad \left. + \mathbf{a}_2 \cos \omega(t - p_1 x - r_1 z + \varphi_H) \sin \omega(t - p_1 x - r_1 z + \varphi_H) \right\} \exp [2\omega(p_2 x + r_2 z)] \end{aligned}$$

e

$$\bar{S} = \mathbf{a}_1 \frac{\varepsilon |E_0|^2 + \mu |H_0|^2}{2\varepsilon \mu} \exp [2\omega(p_2 x + r_2 z)].$$

L'introduzione dei due vettori \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 permette anche una intuitiva interpretazione della (1'). Questa infatti dà luogo alle due equazioni:

$$(p_1^2 + r_1^2) - (p_2^2 + r_2^2) = \Re \varepsilon \mu, \quad p_1 p_2 + r_1 r_2 = \frac{1}{2} \Im \varepsilon \mu = 0 \quad (3),$$

che si possono scrivere:

$$(1'') \quad a_1^2 - a_2^2 = \varepsilon \mu, \quad \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0.$$

La seconda di queste ci dice che nel mezzo considerato ⁽⁴⁾ i vettori \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 devono essere tra loro perpendicolari.

Se $\mathbf{a}_2 = 0$ non si ha attenuazione in nessuna direzione, la (1) rappresenta allora un'onda ordinaria. Se invece $\mathbf{a}_2 \neq 0$ si ha attenuazione in direzione normale a \bar{v} , la (1) rappresenta allora un'onda che è chiamata evanescente ⁽⁵⁾. Dalla prima della (1''): $a_1^2 - a_2^2 = 1/v^2 - a_2^2 = \varepsilon \mu$ risulta $v = 1/\sqrt{\varepsilon \mu + a_2^2}$ e quindi la velocità delle onde evanescenti risulta minore di quella delle onde ordinarie che è uguale a $1/\sqrt{\varepsilon \mu}$. Di conseguenza la lunghezza d'onda di una onda ordinaria: $\lambda = (1/\sqrt{\varepsilon \mu})(1/f)$ risulta, a parità di frequenza, maggiore di quella di un'onda evanescente, che è uguale a $(\sqrt{\varepsilon \mu}/\omega \sqrt{\varepsilon \mu + a_2^2}) \lambda$.

3. -- Riflessione delle onde elettromagnetiche su un piano conduttore.

Supponiamo che i semispazi $z > 0$ e $z < 0$ siano occupati dal mezzo dielettrico precedentemente considerato; il piano $z = 0$ sia invece perfettamente conduttore in modo da esercitare una completa azione di schermo fra i due semispazi. Inizialmente il campo elettromagnetico sia ovunque nullo. Da un certo istante in poi si producano in $z > 0$ delle perturbazioni elettromagnetiche; allorchè queste giungeranno sul piano conduttore vi indurranno delle correnti e delle cariche che ne impediranno la propagazione in $z < 0$, riflettendole. Vediamo ora, nelle ipotesi fatte, a quali condizioni devono soddisfare i campi E e H sulla faccia positiva di $z = 0$ e quali sono le relazioni esistenti tra questi, la densità superficiale di carica σ e la densità superficiale di corrente \bar{j} . Essendo il piano perfettamente conduttore dovrà annullarsi la componente tangenziale di E e la componente normale di H , dovrà cioè essere ⁽⁶⁾:

$$(2) \quad a) \quad E_x = 0, \quad b) \quad E_y = 0, \quad c) \quad H_z = 0.$$

⁽³⁾ Dato un numero complesso $z = \alpha + i\beta$, si intende che sia $\Re z = \alpha$, $\Im z = \beta$.

⁽⁴⁾ Se invece di un mezzo perfetto si fosse considerato un mezzo con perdite, allora o la ε o la μ sarebbe stata complessa e dalla relazione $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (1/2)\Im \varepsilon \mu$ sarebbe seguito che \mathbf{a}_2 avrebbe avuto una componente secondo \mathbf{a}_1 .

⁽⁵⁾ In un mezzo con perdite dovendo essere $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \neq 0$ è sempre $\mathbf{a}_2 \neq 0$ e quindi si ha sempre una attenuazione lungo \bar{v} ; la (1) rappresenterebbe quindi un'onda smorzata.

⁽⁶⁾ Cfr. ad es., S. A. SCHELKUNOFF: *Electromagnetic waves* (New York, 1948), p. 73.

Facilmente si ottengono poi i valori di σ e di \bar{j} in funzione delle altre componenti del campo:

$$(3) \quad \sigma = \varepsilon E_z, \quad j_x = -H_y, \quad j_y = H_x, \quad j_z = 0.$$

In particolare possiamo supporre che la perturbazione elettromagnetica prodotta in $z > 0$ sia rappresentata dalla (1) cui poniamo la condizione di incidere in $z = 0$; deve quindi essere $r_1 \leq 0$.

Ammettiamo che la sua onda riflessa sia rappresentata da equazioni di tipo (1) ma con costanti diverse, cioè dalla (4):

$$(4) \quad \begin{cases} E'_x = \frac{-r'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E'_0 \exp[i\omega'(t - p'x - r'z)], & H'_x = \frac{-r'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H'_0 \exp[i\omega'(t - p'x - r'z)], \\ E'_z = \frac{p'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E'_0 \exp[i\omega'(t - p'x - r'z)], & H'_z = \frac{p'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H'_0 \exp[i\omega'(t - p'x - r'z)], \\ H'_y = -\left|\frac{\bar{\varepsilon}}{\mu}\right| E'_0 \exp[i\omega'(t - p'x - r'z)], & E'_y = \left|\frac{\bar{\mu}}{\varepsilon}\right| H'_0 \exp[i\omega'(t - p'x - r'z)], \end{cases}$$

dove p' ed r' soddisfano all'equazione $p'^2 + r'^2 = \varepsilon\mu$.

Determineremo le E'_0 , H'_0 , ω' , p' , r' , in funzione delle costanti E_0 , H_0 , ω , p , r , dell'onda incidente in modo da soddisfare su $z = 0$ alle condizioni (2).

Le (2) portano alle equazioni:

$$\begin{aligned} a) \quad E_x + E'_x &= \frac{-r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp[i\omega(t - px)] - \frac{r'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E'_0 \exp[i\omega'(t - p'x)] = 0; \\ b) \quad E_y - E'_y &= \left|\frac{\bar{\mu}}{\varepsilon}\right| H_0 \exp[i\omega(t - px)] + \left|\frac{\bar{\mu}}{\varepsilon}\right| H'_0 \exp[i\omega'(t - p'x)] = 0; \\ c) \quad H_z - H'_z &= \frac{p'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp[i\omega(t - px)] - \frac{p'}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H'_0 \exp[i\omega'(t - p'x)] = 0. \end{aligned}$$

Perchè esse siano verificate per ogni valore di t e di x deve essere $\omega = \omega'$, $p = p'$, con cui le a), b), c), si riducono alle due equazioni seguenti:

$$H_0 = -H'_0, \quad rE_0 = -r'E'_0.$$

Poichè poi $p^2 + r^2 = \varepsilon\mu$, $p'^2 + r'^2 = \varepsilon\mu$ deve aversi $r^2 = r'^2$.

Le cinque costanti E'_0 , H'_0 , ω' , p' , r' dovranno quindi soddisfare al sistema:

$$\omega = \omega', \quad p = p', \quad H_0 = -H'_0, \quad rE_0 = -r'E'_0, \quad r^2 = r'^2.$$

Le due ultime equazioni ammettono le due soluzioni:

$$r = r', \quad E_0 = -E'_0 \quad \text{e} \quad r = -r', \quad E_0 = E'_0.$$

Accettando la prima di queste, le due onde, incidente e riflessa, sarebbero uguali in tutto, tranne nella fase che sarebbe opposta. Allora il campo complessivo sarebbe nullo anche in tutto il semispazio $z > 0$, il che è assurdo. Non resta quindi che accettare la seconda soluzione, con cui si ha:

$$(5) \quad \omega = \omega', \quad p = p', \quad r = -r', \quad E_0 = E'_0, \quad H_0 = -H'_0,$$

Sostituendo le costanti così trovate nella (4) si ottiene:

$$(6) \quad \begin{cases} E'_x = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp[i\omega(t - px + rz)], & H'_x = \frac{-r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp[i\omega(t - px + rz)], \\ E'_z = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp[i\omega(t - px + rz)], & H'_z = \frac{-p}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp[i\omega(t - px + rz)], \\ H'_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \exp[i\omega(t - px + rz)], & E'_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0 \exp[i\omega(t - px + rz)], \end{cases}$$

che rappresenta l'onda riflessa prodotta dalla (1).

La seconda e la terza delle equazioni (5) ammettono una significativa interpretazione vettoriale. Indichiamo con \mathbf{a}'_1 , \mathbf{a}'_2 i vettori, di propagazione e di attenuazione, relativi all'onda riflessa. Per la seconda delle (5), le componenti

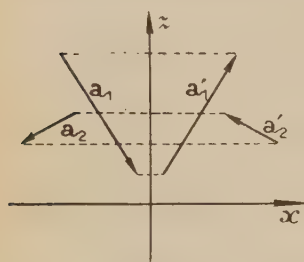


Fig. 1.

secondo l'asse x di \mathbf{a}_1 e di \mathbf{a}'_1 sono uguali tra loro; lo stesso vale per quelle di \mathbf{a}_2 e di \mathbf{a}'_2 . Per la terza, $r = -r'$, le componenti secondo z di \mathbf{a}_1 e di \mathbf{a}'_1 devono essere opposte; lo stesso vale per quelle di \mathbf{a}_2 e di \mathbf{a}'_2 . Si ha quindi:

$$a_1 = a'_1, \quad a_2 = a'_2,$$

$$\widehat{x\mathbf{a}}_1 = -\widehat{x\mathbf{a}}'_1, \quad \widehat{x\mathbf{a}}_2 = -\widehat{x\mathbf{a}}'_2$$

come si vede nella fig. 1.

Troviamo ora le densità di carica e di corrente sul piano conduttore $z = 0$. Mediante le (3) si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} p E_0 \exp[i\omega(t - px)], & j_x = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \exp[i\omega(t - px)], \\ j_y = \frac{-2r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp[i\omega(t - px)], & j_z = 0. \end{cases}$$

Naturalmente per esse vale l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) = 0.$$

II. - DEDUZIONE E STUDIO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO PRODOTTO DA σ E DA \bar{j} .

4. - Ammettendo che la (6) sia l'onda riflessa della (1), si può trovare in un modo rigoroso e semplice il campo prodotto dalle cariche e dalle correnti σ e \bar{j} date dalla (7). Si può ragionare così: se σ e \bar{j} non esistessero, cioè se il

piano $z = 0$ non fosse conduttore, sia in $z > 0$ sia in $z < 0$ il campo sarebbe rappresentato dalla (1). Quando σ e \bar{j} esistono, il campo in $z < 0$ è nullo mentre in $z > 0$ è dato dalla sovrapposizione dell'onda (1) incidente con la (6) riflessa. Questo vuol dire che esse producono in $z > 0$ l'onda (6) e in $z < 0$ un'onda uguale alla (1) ma con fase opposta, avente quindi le equazioni:

$$(8) \quad \begin{cases} E_x = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], & H_x = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\ E_z = -\frac{p}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], & H_z = -\frac{p}{\sqrt{\varepsilon\mu}} H_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], \\ H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \exp [i\omega(t - px - rz)], & E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0 \exp [i\omega(t - px - rz)]. \end{cases}$$

La deduzione ⁽⁷⁾ dei campi prodotti da σ e da \bar{j} si basa sul fatto che la (6) sia l'onda riflessa della (1). Tale ipotesi si può considerare come confermata dall'esperienza in due casi:

$$p_2 = r_2 = 0, \quad r_1 \leq 0 \quad \text{e} \quad p_2 = 0, \quad r_2 > 0, \quad r_1 = 0.$$

Nel primo caso si tratta della riflessione di un'onda ordinaria e innumerevoli sono le esperienze in proposito. Nel secondo caso solo di recente si è avuta la conferma sperimentale facendo riflettere su di un piano conduttore le onde evanescenti prodotte per riflessione totale ⁽⁸⁾. È possibile che la (6) e la (8) rappresentino il campo prodotto da σ e da \bar{j} anche in altri casi; ad es. se $r_1 \leq 0$, $p_2 = 0$, mancando però la conferma sperimentale corrispondente non si può affermarlo con sicurezza. Riepilogando diremo quindi che la σ e la \bar{j} producono i campi (6) e (8) solo quando le costanti $p = p_1 + ip_2$, $r = r_1 + ir_2$ soddisfano o alle condizioni a) o alle b):

$$(9) \quad \begin{cases} a) & p^2 + r^2 = \varepsilon\mu, \quad p_2 = r_2 = 0, \quad r_1 \leq 0, \\ b) & p^2 - r^2 = \varepsilon\mu, \quad p_2 = 0, \quad r_2 > 0, \quad r_1 = 0. \end{cases}$$

Esaminiamo ora criticamente, da un punto di vista fisico, il risultato raggiunto. L'onda rappresentata dalla (1) e dalla (6) si estende in tutto il semispazio $z > 0$ e pertanto non può fisicamente esistere. A rigor di termini le esperienze sopra citate dicono che se in una regione del semispazio $z > 0$, aderente al piano conduttore $z = 0$, il campo dell'onda incidente è rappresentato dalla (1), in detta regione il campo dell'onda riflessa sarà con buona approssimazione rappresentato dalla (6). Passando al limite quando detta

⁽⁷⁾ Se si considerasse in un mezzo elastico un piano rigido e vi si facesse riflettere un'onda elastica, con un procedimento simile a quello da noi usato, si potrebbero calcolare le deformazioni prodotte nel mezzo da delle tensioni esercitate su di un piano, che variassero sinusoidalmente lungo un asse di detto piano e nel tempo.

⁽⁸⁾ Si veda: S. GIBELLATO: *Nuovo Cimento*, 6, 344 (1949).

regione tende all'infinito (in tutte le direzioni sempre restando $z > 0$), in tutto il semispazio $z > 0$ l'onda riflessa sarà data esattamente dalla (6).

Analoghe precisazioni vanno fatte anche per le cariche e le correnti (7), poichè nemmeno esse possono fisicamente esistere su tutto il piano $z = 0$. Consideriamo su detto piano delle densità di carica e di corrente che entro una regione D siano rappresentate dalle (7) e che per i punti esterni a D decrescano rapidamente al crescere della distanza dal contorno. Tali cariche e tali correnti creano un campo elettromagnetico che per i punti trovantisi fuori del piano $z = 0$, nelle immediate vicinanze di D , è dato approssimativamente dalla (6) se $z > 0$ e dalla (8) se $z < 0$. Al limite quando la regione D tende all'infinito il campo prodotto sarà dato esattamente dalla (6), in tutto $z > 0$, e dalla (8) in tutto $z < 0$. Poniamo:

$$(10) \quad \omega = nu > 0 \text{ } ^{(9)}, \quad p_1 = \frac{1}{u}, \quad E_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu}}{2\epsilon p} \sigma_0, \quad H_0 = -\frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu}}{2r} j_0.$$

La (7) allora diventa:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \exp \left[i n u \left(t - \frac{x}{u} \right) \right], & j_x &= u \sigma_0 \exp \left[i n u \left(t - \frac{x}{u} \right) \right], \\ j_y &= j_0 \exp \left[i n u \left(t - \frac{x}{u} \right) \right], & j_z &= 0; \end{aligned}$$

e considerando la sola parte reale:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \cos n u \left(t - \frac{x}{u} \right), & j_x &= u \sigma_0 \cos n u \left(t - \frac{x}{u} \right), \\ j_y &= j_0 \cos n u \left(t - \frac{x}{u} \right), & j_z &= 0. \end{aligned}$$

La prima di queste rappresenta una densità di carica, uniforme lungo le parallele all'asse y , che al tempo t varia sinusoidalmente lungo le parallele all'asse x e che, al crescere di t si sposta senza deformarsi con una velocità u diretta secondo l'asse x . Comportamento simile hanno anche le componenti della densità di corrente.

In generale la σ si dovrà considerare come una sovrabbondanza di cariche elementari di un segno rispetto a quelle di segno opposto e quindi essa col suo moto non determina la velocità delle particelle elementari che possono muoversi tanto più lentamente quanto più sono numerose. Così la u potrà superare la velocità della luce nel vuoto senza contraddire i postulati relativistici. La direzione della velocità media delle cariche elementari (cioè la differenza tra la velocità media delle particelle positive e la velocità media delle particelle negative) coincide con quella della densità di corrente \bar{j} , la quale è legata a σ solo dall'equazione di continuità $\partial \sigma / \partial t = -\operatorname{div} \bar{j}$. In particolare \bar{j}

⁽⁹⁾ Si è dovuto porre $nu > 0$ poichè è stato supposto $\omega > 0$.

può avere anche la componente j_y , pur spostandosi la σ lungo l'asse x . Dalla relazione $\varepsilon\mu = p^2 + r^2 = (1/u)^2 + r^2$, dovendo essere per le (9) o $r_1 \leq 0$, $r_2 = 0$ o $r_1 = 0$, $r_2 > 0$ si ha:

$$r = \begin{cases} i \sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^2 - \varepsilon\mu} = \frac{i}{|u|} \sqrt{1 - \beta^2}, & \text{per } |u| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \\ -\sqrt{\varepsilon\mu - \left(\frac{1}{u}\right)^2} = -\frac{1}{|u|} \sqrt{\beta^2 - 1}, & \text{per } |u| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \end{cases}$$

essendosi posto $\beta = \sqrt{\varepsilon\mu} u$.

I campi (6) e (8) presentano delle caratteristiche molto diverse a seconda che r è reale o immaginario. Esamineremo perciò separatamente i due casi: $|u| < 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $|u| \geq 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Per semplificare l'esposizione supporremo dapprima $j_y = 0$; dalla (7) consegue $H_0 = 0$: il campo prodotto da σ e da \bar{j} si riduce alle tre componenti E_x , E_z , H_y .

5. - I CASO: $|u| < 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Ponendo nella (6) e nella (8) il valore corrispondente di r , tenendo conto delle posizioni fatte e considerando la sola parte reale delle espressioni ottenute si ha:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \text{La densità di carica } \sigma = \sigma_0 \cos nu(t - x/u) \text{ e la densità di corrente} \\ \text{di componenti } j_x = u\sigma_0 \cos nu(t - x/u), \quad j_y = 0, \quad j_z = 0, \text{ con } |u| < 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \\ \text{e con } nu > 0, \text{ giacenti sul piano } z = 0, \text{ producono il campo elettroma-} \\ \text{gnetico:} \\ \left. \begin{array}{l} E_x = \frac{\mp \sqrt{1 - \beta^2}}{2\varepsilon} \sigma_0 \sin nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \exp [\mp n\sqrt{1 - \beta^2}z] \\ E_z = \frac{1}{2\varepsilon} \sigma_0 \cos nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \exp [\mp n\sqrt{1 - \beta^2}z] \\ H_y = \frac{-u}{2} \sigma_0 \cos nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \exp [\mp n\sqrt{1 - \beta^2}z] \end{array} \right\} \text{ per } z > 0; \\ \left. \begin{array}{l} E_x = \frac{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}{2\varepsilon} \sigma_0 \sin nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \exp [\pm n\sqrt{1 - \beta^2}z] \\ E_z = \frac{-1}{2\varepsilon} \sigma_0 \cos nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \exp [\pm n\sqrt{1 - \beta^2}z] \\ H_y = \frac{u}{2} \sigma_0 \cos nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \exp [\pm n\sqrt{1 - \beta^2}z] \end{array} \right\} \text{ per } z < 0, \\ \text{essendo ovunque } H_x = H_z = E_y = 0, \end{array} \right.$$

convenendo di prendere il segno superiore se $u > 0$ ed inferiore se $u < 0$.

Nell'indicare le tre componenti del campo per $z > 0$, provenienti dalla (6) abbiamo tralasciato gli apici, non essendoci più pericolo di confusione.

Prima di discutere le espressioni trovate, calcoliamone i limiti quando $u \rightarrow 0$. Non ci saranno allora correnti e la densità di carica resterà immobile, si avrà:

La densità di carica: $\sigma = \sigma_0 \cos nx$, con $n > 0$ giacente sul piano $z = 0$, produce il campo elettrostatico:

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \sin nx \exp[-nz] \\ E_z &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \cos nx \exp[-nz] \end{aligned} \right\} \text{ per } z > 0 ;$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \sin nx \exp[nz] \\ E_z &= -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \cos nx \exp[nz] \end{aligned} \right\} \text{ per } z < 0 ,$$

essendo ovunque $H_y = H_x = H_z = E_y = 0$.

Esaminando le equazioni (12), si vede che i tubi di flusso del campo elettrico partenti dalle zone a densità positiva, dopo essersi allontanati dal piano $z = 0$, tornano indietro andando a terminare nelle zone a densità negativa, con l'andamento visibile in fig. 2. Se σ , invece di essere ferma si muove secondo x con una velocità $|u| < 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, producendo la densità di corrente $j_x = u\sigma_0 \cos nu(t - x/u)$, $j_y = j_z = 0$, oltre alle componenti E_x , E_z compare anche la componente H_y del campo magnetico. Come si può dedurre dalle

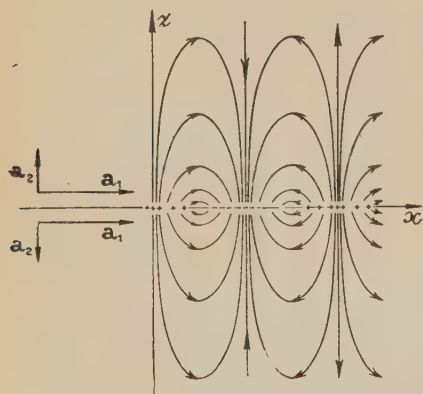


Fig. 2.

equazioni (11), per un dato istante, l'andamento dei tubi di forza elettrica rimane qualitativamente uguale a quello di fig. 2, solo che al crescere di $|u|$ tali tubi raggiungono, prima di tornare indietro, distanze sempre maggiori dal piano $z = 0$. Al variare del tempo detto campo si sposta con una velocità \bar{v} di componenti $v_x = u$, $v_y = v_z = 0$: esso è formato in $z > 0$ e $z < 0$ da due onde evanescenti (di cui si vedono in fig. 2 i vettori caratteristici) che accompagnano σ nel suo moto. Tali onde decrescono esponenzialmente secondo $\exp[-\sqrt{1-\beta^2}|nz|]$; quando

$|u| = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, cioè $\beta^2 = 1$, il coefficiente di z si annulla facendo cessare l'attenuazione: i tubi di forza diventano normali a $z = 0$, partono dalle zone a densità positiva e vanno all'infinito, e dall'infinito ritornano alle zone a densità negativa: il campo viene ad essere costituito da due onde piane ordinarie propagantisi l'asse lungo x .

La componente E_x , o è sfasata di $\pi/2$ rispetto a σ (se $|u| < 1/\sqrt{\epsilon\mu}$), o è nulla (se $|u| = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$), il lavoro compiuto da σ è quindi in media nullo. In armonia con questo il vettore medio di Poynting \bar{S} avendo la direzione di \bar{v} viene ad essere diretto secondo l'asse x , non c'è quindi alcun flusso medio di energia che si allontani dal piano delle cariche.

Dalle considerazioni fatte in questo numero, le onde evanescenti risultano essere il « trait d'union » tra i campi elettrostatici e le onde ordinarie.

6. - II CASO: $|u| \geq 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. In questo caso si ha:

$$r = r_1 = -\sqrt{\epsilon\mu - \left(\frac{1}{u}\right)^2} = -\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}u}\right)^2}.$$

Essendo $-1 \leq 1/\sqrt{\epsilon\mu}u \leq 1$ si può porre $1/\sqrt{\epsilon\mu}u = p/\sqrt{\epsilon\mu} = \cos \varphi$, essendo φ un angolo di cui in seguito preciseremo il significato fisico.

Segue poi:

$$p = p_1 = \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi, \quad r = r_1 = -\sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi.$$

Gli esponenziali che compaiono nella (6) e nella (8) diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\exp [i\omega(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x + \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z)], \\ &\exp [i\omega(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x - \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z)], \end{aligned}$$

da cui risulta che le onde rappresentate dalla (6) e dalla (8) sono del tipo ordinario. I loro vettori di attenuazione sono nulli e quelli di propagazione risul-

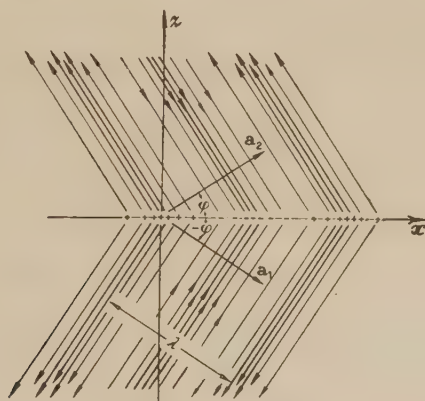


Fig. 3.

tano essere disposti come in fig. 3: per il vettore \mathbf{a}_1 dell'onda (6) si ha $\widehat{x\mathbf{a}_1} = \varphi$, per il vettore \mathbf{a}_1 dell'onda (8) si ha $\widehat{x\mathbf{a}_1} = -\varphi$. Sostituendo nella (6) e nella (8) i valori di p e di r sopra trovati, tenendo conto della (10) e pren-

dendo la parte reale delle espressioni così ottenute si giunge alla seguente proposizione:

La densità di carica $\sigma = \sigma_0 \cos nu(t - x/u)$ e la densità di corrente di componenti $j_x = u\sigma_0 \cos nu(t - x/u)$, $j_y = 0$, $j_z = 0$, con $|u| \geq 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, giacenti sul piano $z = 0$, producono il campo elettromagnetico:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = -\sin \varphi \frac{\sigma_0}{2\epsilon \cos \varphi} \cos nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x - \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z) \\ E_z = \cos \varphi \frac{\sigma_0}{2\epsilon \cos \varphi} \cos nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x - \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z) \\ H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\sigma_0}{2\epsilon \cos \varphi} \cos nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x - \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z) \end{array} \right\} \text{ per } z > 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\sin \varphi \frac{\sigma_0}{2\epsilon \cos \varphi} \cos nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x + \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z) \\ E_z = -\cos \varphi \frac{\sigma_0}{2\epsilon \cos \varphi} \cos nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x + \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z) \\ H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\sigma_0}{2\epsilon \cos \varphi} \cos nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x + \sqrt{\epsilon\mu} \sin \varphi z) \end{array} \right\} \text{ per } z < 0,$$

essendo ovunque $H_x = H_z = E_y = 0$.

La σ e la \bar{j} producono dunque nei due semipiani $z > 0$ e $z < 0$ due onde ordinarie, aventi il vettore elettrico di ampiezza $\sigma_0/2\epsilon \cos \varphi$, che partono simmetricamente dal piano $z = 0$. I tubi di forza elettrica, perpendicolari alla direzione di propagazione, partendo dalle zone a densità positiva vanno all'infinito e, provenendo dall'infinito, terminano nelle zone a densità negativa. Dalla relazione $\cos \varphi = 1/\sqrt{\epsilon\mu}u$ risulta che mentre per $|u| = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ le onde costeggiano il piano delle cariche, al crescere di $|u|$ se ne allontanano sempre più decisamente, finchè per $|u| = \infty$ se ne distaccano perpendicolarmente. Avendo il vettore medio di Poynting la direzione di \mathbf{a}_1 , esisterà per $|u| = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ un flusso di energia partente dalle cariche.

L'energia irraggiata da un elemento del piano $z = 0$, di superficie dS , è uguale alla potenza dW ivi prodotta dalle cariche. Si ha:

$$dW = -E \cdot \bar{j} dS = -E_x \cdot j_x dS = u \operatorname{tg} \varphi \frac{\sigma_0^2}{2\epsilon} \cos^2 nu(t - \sqrt{\epsilon\mu} \cos \varphi x) dS,$$

da cui si ottiene la potenza media (rispetto al tempo) \bar{W} irradiata per unità di superficie:

$$\bar{W} = u \operatorname{tg} \varphi \frac{\sigma_0^2}{4\epsilon} = |u| \sqrt{\beta^2 - 1} \frac{\sigma_0^2}{4\epsilon}.$$

7. — Nei nn. 5 e 6 si è visto che la densità di carica σ e la densità di corrente \bar{j} , di cui $j_y = 0$ producono un campo elettromagnetico in cui compaiono solo le tre componenti E_x , E_z , H_y , del I gruppo. Se invece si considerasse una densità di carica nulla e una densità di corrente avente solo la compo-

nente $j_y = j_0 \cos nu(t - x/u)$, cioè si ponesse nella (10) $\sigma_0 = 0$, si troverebbe che il campo prodotto presenterà solo le tre componenti H_x , H_z , E_y del II gruppo. Noi non esamineremo dettagliatamente quest'ultimo caso, ma ci limiteremo a dare le espressioni del campo, valide per qualunque valore di u , quando esistano contemporaneamente σ , j_x , j_y .

Facciamo ancora la posizione:

$$\Gamma = \begin{cases} -in\sqrt{1 - (\sqrt{\varepsilon\mu}u)^2}, & \text{per } |u| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \\ n\sqrt{(\sqrt{\varepsilon\mu}u)^2 - 1}, & \text{per } |u| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \end{cases}$$

con cui diviene $r = -\Gamma/nu$. Allora tenendo conto delle (10), dalla (7), dalla (6), e dalla (8) si deduce la seguente proposizione.

La densità di carica $\sigma = \sigma_0 \exp[inu(t - x/u)]$ e la densità di corrente di componenti $j_x = u\sigma_0 \exp[inu(t - x/u)]$, $j_y = j_0 \exp[nu(t - x/u)]$, $j_z = 0$, con $nu > 0$, giacenti sul piano $z = 0$, producono il seguente campo elettromagnetico:

$$(14) \quad \left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\Gamma}{n} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) - i\Gamma z\right], \\ E_z &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) - i\Gamma z\right], \\ H_y &= -u \frac{\sigma_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) - i\Gamma z\right], \\ H_x &= \frac{j_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) - i\Gamma z\right] \\ H_z &= -\frac{n}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) - i\Gamma z\right] \\ E_y &= -\mu \frac{nu}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) - i\Gamma z\right] \end{aligned} \right\} \text{ per } z > 0 ;$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\Gamma}{n} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) + i\Gamma z\right], \\ E_z &= -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) + i\Gamma z\right], \\ H_y &= u \frac{\sigma_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) + i\Gamma z\right], \\ H_x &= -\frac{j_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) + i\Gamma z\right] \\ H_z &= -\frac{n}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) + i\Gamma z\right] \\ E_y &= -\mu \frac{nu}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp\left[inu\left(t - \frac{x}{u}\right) + i\Gamma z\right] \end{aligned} \right\} \text{ per } z < 0 .$$

Notiamo che il campo del II gruppo presenta una singolarità per $|u| = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, che manca invece nel I gruppo: ad una componente j_v finita, corrisponde un campo infinito; infatti quando $|u| \rightarrow 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ si ha che $\Gamma \rightarrow 0$ e quindi $H_z \rightarrow \infty$, $E_v \rightarrow \infty$.

8. - Le proposizioni (11), (12), (13), (14) si possono ottenere anche mediante l'impiego del potenziale vettore ritardato A e del potenziale scalare ritardato V , pur risultando tale calcolo alquanto complesso. Noi accenneremo brevemente a come si ricava la (14), limitandoci al caso in cui $\sigma_0 = 0$; la densità di carica risulterà allora ovunque nulla e sarà $V = 0$. Essendo $\bar{j} = \bar{j}(t, x, y)$ diversa da zero solo sul piano $z = 0$, il potenziale vettore A nel punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ al tempo t , indicando con $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}$ la distanza tra P e un punto $Q = (x, y, 0)$ del piano $z = 0$, avrà l'espressione:

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{\bar{j}(t - \sqrt{\varepsilon\mu}r, x, y)}{r} dx dy,$$

essendo l'integrazione estesa a tutto il piano xy . Scindendo i vettori A e \bar{j} nelle loro componenti, essendo $j_x = j_z = 0$, $j_v = j_0 \exp[inu(t - x/u)]$, dall'espressione precedente si ottiene:

$$A_x = A_z = 0, \quad A_v = \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{j_0 \exp[inu(t - \sqrt{\varepsilon\mu}r - x/u)]}{r} dx dy.$$

Indichiamo con $O = (x_0, y_0, 0)$ la proiezione ortogonale di P sul piano $z = 0$. Per eseguire l'integrazione conviene esprimere le coordinate x e y del punto Q in funzione di r e dell'angolo θ che il vettore $(Q - O)$ forma con l'asse x . Si ha:

$$x = x_0 + \sqrt{r^2 - z_0^2} \cos \theta, \quad y = y_0 + \sqrt{r^2 - z_0^2} \sin \theta,$$

l'elemento di superficie nelle nuove coordinate risulta essere $r dr d\theta$, di conseguenza si ha:

$$A_v = \frac{\mu}{4\pi} j_0 \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) \right] \int_{z_0}^{\infty} dr \exp [-i\sqrt{\varepsilon\mu}nur] \int_0^{2\pi} \exp [-in\sqrt{r^2 - z_0^2} \cos \theta] d\theta.$$

Per eseguire più facilmente l'integrazione, in armonia con le osservazioni fatte nel n. 4 a proposito delle cariche e delle correnti (7), modifichiamo la j_v supponendo che la sua ampiezza non sia costante ed uguale a j_0 ma decresca al crescere di r secondo $j_0 \exp[-\eta r]$, essendo $\eta > 0$. Indichiamo con A^v il potenziale vettore prodotto da questa nuova distribuzione di corrente; il poten-

ziale vettore A da noi cercato sarà dato dal $\lim_{\eta \rightarrow 0} A^\eta$. L'espressione di A^η sarà:

$$A^\eta = \left\{ \int_{z_0}^{\infty} dr \exp [-(\eta + i\sqrt{\varepsilon\mu}nu)r] \int_0^{2\pi} \exp [-in\sqrt{r^2 - z_0^2} \cos \theta] d\theta \right\} \times \\ \times \frac{\mu}{4\pi} j_0 \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) \right]$$

da cui, ponendo:

$$\vartheta = \eta + i\sqrt{\varepsilon\mu}nu,$$

e ricordando che:

$$\int_0^{2\pi} \exp [-iz \cos \theta] d\theta = 2\pi J_0(z),$$

si ha:

$$A^\eta = \mu \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) \right] \int_{z_0}^{\infty} \exp [-\vartheta r] J_0(n\sqrt{r^2 - z_0^2}) dr.$$

Essendo $\Re \vartheta > 0$ mediante una integrazione per serie si ha ⁽¹⁰⁾:

$$\int_{z_0}^{\infty} \exp [-\vartheta r] J_0(n\sqrt{r^2 - z_0^2}) dr = \frac{\exp [-\sqrt{\vartheta^2 + n^2} |z_0|]}{\sqrt{\vartheta^2 + n^2}}$$

indicando con $\sqrt{\vartheta^2 - n^2}$ la radice di $(\vartheta^2 - n^2)$ avente la parte reale positiva.

Si ottiene così:

$$A^\eta = \frac{\mu}{\sqrt{\vartheta^2 + n^2}} \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) - \sqrt{\vartheta^2 + n^2} |z_0| \right],$$

e risultando il $\lim_{\eta \rightarrow 0} (-i\sqrt{\vartheta^2 + n^2})$ uguale all'espressione indicata con Γ nel numero precedente, si ha:

$$A_\nu = \lim_{\eta \rightarrow 0} A^\eta = -\frac{i\mu}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) - i\Gamma |z_0| \right].$$

I vettori E e H in funzione di A sono dati dalle equazioni

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = \frac{1}{\mu} \text{rot } A.$$

⁽¹⁰⁾ Si veda, ad es., A. GHIZZETTI: *Calcolo simbolico* (Bologna, 1943), p. 97.

Si ottiene così, per $z_0 > 0$:

$$\begin{aligned} E_x = E_z = 0, \quad E_y &= -\frac{\partial A_y}{\partial t} = -\mu \frac{nu}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) - i\Gamma z_0 \right], \\ H_y &= 0, \quad H_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) - i\Gamma z_0 \right], \\ H_z &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{n}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) - i\Gamma z_0 \right], \end{aligned}$$

e per $z_0 < 0$:

$$\begin{aligned} E_x = E_z = 0, \quad E_y &= -\mu \frac{nu}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) + i\Gamma z_0 \right], \\ H_y &= 0, \quad H_x = \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) + i\Gamma z_0 \right], \\ H_z &= \frac{n}{\Gamma} \frac{j_0}{2} \exp \left[inu \left(t - \frac{x_0}{u} \right) + i\Gamma z_0 \right]. \end{aligned}$$

Il campo così trovato, previa la sostituzione $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}$, coincide quindi con quello dato dalla (14).

9. - Nel sistema di riferimento che finora abbiamo usato, i due vettori \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 erano paralleli al piano $y = 0$ e risultavano quindi nulle le loro componenti rispetto all'asse y . Riferiamo ora l'onda (1) ad un nuovo sistema di assi ortogonali x', y', z' , ottenuto dal precedente mediante una rotazione attorno all'asse z ; indichiamo con $p'_1, q'_1, r'_1, p'_2, q'_2, r'_2$ le componenti di \mathbf{a}_1 e di \mathbf{a}_2 secondo i nuovi assi.

Posto

$$p' = p'_1 + ip'_2, \quad q' = q'_1 + iq'_2, \quad r' = r'_1 + ir'_2,$$

l'esponentiale della (1):

$$\exp [i\omega(t - (P - O) \times \mathbf{a}_1) - \omega[(P - O) \times \mathbf{a}_2]],$$

riferito agli assi x', y', z' e messo in forma scalare diventa:

$$\exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')],$$

e quindi l'onda (1) nel nuovo sistema assumerebbe la forma:

$$(15) \quad \begin{cases} E_{x'} = E_{x'}^0 \exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')], \\ E_{y'} = E_{y'}^0 \exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')], \\ E_{z'} = E_{z'}^0 \exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')], \\ H_{x'} = H_{x'}^0 \exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')], \\ H_{y'} = H_{y'}^0 \exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')], \\ H_{z'} = H_{z'}^0 \exp [i\omega(t - p'x' - q'y' - r'z')], \end{cases}$$

dove $E_x^0, E_y^0, E_z^0, H_x^0, H_y^0, H_z^0$, sarebbero delle costanti complesse essendo combinazioni lineari di $-r/\sqrt{\varepsilon\mu}E_0, \sqrt{\mu/\varepsilon}H_0, p/\sqrt{\varepsilon\mu}E_0, -r/\sqrt{\varepsilon\mu}H_0, -\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0, p/\sqrt{\varepsilon\mu}H_0$.

Dalle (1'') si avrebbe:

$$(p_1'^2 + q_1'^2 + r_1'^2) - (p_2'^2 + q_2'^2 + r_2'^2) = \varepsilon\mu, \quad (p_1'p_2' + q_1'q_2' + r_1'r_2') = 0.$$

Viceversa una qualsiasi onda nella forma (15), quali che siano i valori di p', q', r' , con una rotazione di assi può sempre essere ridotta ad una forma (1). Possiamo dunque dire che le onde generalizzate di esponenziale

$$\exp[i\omega(t - px - qy - rz)],$$

non costituiscono una classe più ampia di quelle esaminate nei nn. precedenti, ma possono tutte ottenersi da quest'ultima mediante una rotazione attorno all'asse z . Esse sono quindi generabili da delle densità di carica e di corrente ottenute dalla (7) mediante una rotazione attorno all'asse z (ove quest'ultima rispetti le condizioni (9)).

Ringrazio vivamente il prof. N. CARRARA per il suo costante incoraggiamento e per i suoi vari utili consigli.

SUMMARY

The paper considers e.m. waves of general type (comprising ordinary and surface waves) to each of which two vectors are connected: the propagation vector \mathbf{a}_1 and the attenuation vector \mathbf{a}_2 by means of which some properties of the waves are studied. Falling on a perfectly conductive plane, such a wave (given by equations (1)) induces on it currents \bar{j} and charges σ (given by eq. (7)) which impeding the wave to progress further, originate a reflected wave (given by eq. (6)). This means that \bar{j} and σ give rise in an half-space to the wave which we have called reflected wave and in the other to a wave equal to the (1) but with opposed phase. In this way has been found the field produced by \bar{j} and σ , which, writing positions (10), result dependent from time and coordinates by a coefficient $\cos nu(t - x/u)$; they may therefore be conceived as rigidly progressing with velocity u , velocity which can vary from nought to infinite. The field presents fully different features if $|u|$ is smaller or greater as $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. In the first case, ($|u| < 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$) treated in n. 5, the field is formed by two surface waves which progress parallel to the plane of charges $z = 0$, accompanying \bar{j} and σ in their motion; the electrical force lines show the shape represented in fig. 2. In the second case ($|u| > 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, n. 6), the field is formed by two ordinary waves which start symmetrically from the plane of charges; the electrical force lines show the shape represented in fig. 3. In n. 8, the field produced by \bar{j} and σ is found also analitically, considering the vector potential and the scalar potential.

Influenza della funzione di sorgente sulla distribuzione dei neutroni termici in un mezzo moltiplicante.

S. GALLONE e C. SALVETTI

Istituto di Fisica dell'Università e Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 23 Giugno 1950)

Riassunto. — Si estendono i risultati di una nota precedente sulla distribuzione dei neutroni termici nei mezzi moltiplicanti al caso in cui l'energia dei neutroni della sorgente sia superiore a quella dei neutroni di moltiplicazione. Si studia inoltre l'influenza del libero cammino medio non nullo dei neutroni veloci nascenti sulla densità dei neutroni termici e in particolare sul comportamento asintotico di questa. Precede una dimostrazione di equivalenza fra due metodi di calcolo illustrati nella nota già ricordata.

Introduzione.

In una nota precedente ⁽¹⁾ si è calcolata la distribuzione dei neutroni termici in un mezzo moltiplicante contenente una sorgente (monocinetica) di neutroni veloci: tale trattazione era ivi limitata al caso di energia E_0 dei neutroni di sorgente inferiore a quella E_m dei neutroni di moltiplicazione.

In vista di esperimenti con sorgenti di neutroni di energia qualsiasi, si ritiene di un certo interesse richiamare l'attenzione sulle difficoltà che comporta l'estensione, qui svolta, del precedente calcolo al caso $E_0 > E_m$.

Nell'occasione si è anche dimostrata l'equivalenza, ai fini del calcolo della densità termica, del cosiddetto metodo delle caratteristiche (G.S., n. 7) con quello delle armoniche (G.S., n. 4).

Un altro punto sul quale si è portata l'attenzione è quello del comportamento asintotico delle soluzioni nei mezzi μ infiniti: in una migliore appros-

⁽¹⁾ S. GALLONE e C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 482 (1950). A tale lavoro, che nel seguito verrà citato come G.S., si fa riferimento per notazioni, simboli e bibliografia.

simazione della « age theory » ottenuta introducendo il cammino che i neutroni veloci nascenti compiono prima di subire il primo urto, si trova che il comportamento asintotico della densità può esserne molto influenzato.

Le considerazioni che seguono sono svolte nel caso unidimensionale infinito (sorgente piana indefinita): l'estensione al caso di sorgente puntiforme in un mezzo μ infinito si riconduce immediatamente a questo caso mediante la ben nota formula

$$\rho_{pt}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \left[\frac{\partial \rho_{pt}}{\partial z} \right]_{z=r},$$

dove ρ_{pt} e ρ_{pi} sono le funzioni di distribuzione relative ai due casi.

È facile infine rendersi conto che la conoscenza delle soluzioni qui ottenute relative al mezzo infinito, è sufficiente al calcolo delle funzioni di distribuzione per i vari mezzi finiti considerati nel precedente lavoro.

1. — Dimostrazione dell'equivalenza del metodo delle caratteristiche e di quello delle armoniche.

Si vuole mostrare che anche il metodo delle caratteristiche conduce per il mezzo infinito e sorgente piana $S_0(z) = S_0\delta(z - z_0)$ alla seguente espressione per la densità termica:

$$(1.1) \quad \rho(z) = \frac{S_0\tau_0 p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0\omega^2 + i\omega(z - z_0)] d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]}$$

già ottenuta col metodo delle armoniche (G.S. (6.9)).

Con ciò il problema della generalizzazione per $E_0 > E_m$, delle soluzioni ottenute coi due metodi, si riduce a quello del calcolo dell'integrale (1.1) per $\tau_0 > \tau$.

L'equazione da integrare è la (2.7) di G.S.:

$$(1.2) \quad L^2 \rho''(z) - \rho(z) + k_\infty \exp[\tau D^2] \rho(z) = -S_0 \tau_0 p \exp[\tau_0 D^2] \delta(z - z_0).$$

Il metodo delle caratteristiche consiste nel trattare l'operatore $\exp[\tau D^2]$ ⁽²⁾ che opera sulla densità $\rho(z)$, come un vero e proprio operatore differenziale, mentre l'operatore $\exp[\tau_0 D^2]$, che opera sulla funzione di sorgente, viene applicato nel senso specificato dalla definizione data in nota ⁽⁴⁾ di G.S.

Il metodo delle caratteristiche, con le condizioni al contorno

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \rho(z) = 0$$

⁽²⁾ Per semplicità di notazioni $D = D_z = d/dz$.

fornisce per la densità termica l'espressione:

$$(1.3) \quad \rho(z) = iS_0\tau_cp \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Phi'(\beta_l)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\beta_l |t-z|] \exp[\tau_0 D_l^2] \delta(t-z_0) dt,$$

dove le β_l sono le radici dell'equazione:

$$(1.4) \quad \Phi(\omega) = 1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2] = 0,$$

specificate e ordinate secondo la convenzione del n. 5 di G.S.. Si può dimo-

strare (v. App.) che è legittima l'inversione del segno di $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ con quello di $\int_{-\infty}^{+\infty}$. Pertanto:

$$(1.5) \quad \rho(z) = iS_0\tau_cp \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\beta_l |t-z|]}{\Phi'(\beta_l)} \exp[\tau_0 D_l^2] \delta(t-z_0) dt,$$

da cui applicando la (6.3) di G.S. si ha:

$$(1.6) \quad \rho(z) = iS_0\tau_cp \exp[\tau_0 D_{z_0}^2] \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\beta_l |z_0-z|]}{\Phi'(\beta_l)} \right].$$

D'altra parte si ha:

$$(1.7) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\beta_l |z-z_0|]}{\Phi'(\beta_l)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\omega(z-z_0)] d\omega}{\Phi(\omega)},$$

da cui:

$$(1.8) \quad \rho(z) = \frac{S_0\tau_cp}{2\pi} \exp[\tau_0 D_{z_0}^2] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\omega(z-z_0)]}{\Phi(\omega)} d\omega.$$

Ricordando ora come opera l'operatore $\exp[\tau_0 D^2]$, giusta la definizione di nota (4) di G.S. si ha in definitiva per la densità termica l'espressione (1.1). Resta con ciò provata l'equivalenza del metodo delle caratteristiche con quello delle armoniche.

2. - Calcolo della funzione di distribuzione: caso generale in cui l'energia dei neutroni di sorgente è qualsiasi.

Si è già osservato (3) che all'integrale

$$(2.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0\omega^2 + i\omega x] d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]},$$

(3) Vedi n. (5, a) di G.S..

che compare nella espressione (1.1) della densità ($x = z - z_0$) non è direttamente applicabile il metodo di Cauchy qualora sia $\tau_0 > \tau$.

Ci si propone pertanto di calcolare (2.1) senza imporre la limitazione $\tau_0 < \tau$ (*).

Sia dunque $n\tau < \tau_0 < (n+1)\tau$. Si ha identicamente:

$$(2.2) \quad \frac{1}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]} = \frac{1}{k_\infty^n} \frac{(1 + \omega^2 L^2)^n \exp[n\tau\omega^2]}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]} - \\ - \sum_{m=1}^n \frac{1}{k_\infty^m} (1 + \omega^2 L^2)^{m-1} \exp[m\tau\omega^2],$$

per cui l'integrale (2.1) si scrive:

$$(2.3) \quad \frac{1}{k_\infty^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \omega^2 L^2)^n \exp[-(\tau_0 - n\tau)\omega^2 + i\omega x] d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]} - \\ - \sum_{m=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \omega^2 L^2)^{m-1} \exp[-(\tau_0 - m\tau)\omega^2 + i\omega x] d\omega}{k_\infty^m}.$$

Il primo integrale, per $x \neq 0$, si calcola col metodo dei residui e conduce a:

$$(2.4) \quad \pi i \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0 \beta_i^2 + i\beta_i |x|]}{\beta_i [L^2 + \tau(1 + \beta_i^2 L^2)]}.$$

Quanto agli altri, che in un certo senso rappresentano dei termini di correzione, sono anch'essi facilmente calcolabili. Si ottiene:

$$(2.5) \quad \sum_{m=1}^n \frac{1}{k_\infty^m} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \omega^2 L^2)^{m-1} \exp[-(\tau_0 - m\tau)\omega^2 + i\omega x] d\omega = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau_0 - m\tau)}\right]}{k_\infty^m \sqrt{2(\tau_0 - m\tau)}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j} L^{2j} \frac{H_{2j}\left(\frac{x}{\sqrt{2(\tau_0 - m\tau)}}\right)}{2(\tau_0 - m\tau)^j} = \Phi_n(\tau_0, x).$$

Dove H_{2j} è il polinomio di Hermite di ordine $2j$.

Pertanto, per $x \neq 0$ e $n\tau < \tau_0 < (n+1)\tau$, l'integrale (2.1) è dato dalla espressione

$$(2.6) \quad \pi i \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0 \beta_i^2 + i\beta_i |x|]}{\beta_i [L^2 + \tau(1 + \beta_i^2 L^2)]} - \Phi_n(\tau_0, x),$$

(*) Ringraziamo il prof. L. AMERIO per il suo contributo a questo calcolo.

che costituisce l'estensione del risultato ottenuto col metodo dei residui al caso di τ_0 qualunque.

È interessante osservare che, sempre per $x \neq 0$, si ha

$$(2.7) \quad \lim_{\tau_0 \rightarrow n\tau} \frac{\partial^k}{\partial \tau_0^k} [\Phi_n(\tau_0, x) - \Phi_{n-1}(\tau_0, x)] = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

vale a dire che il termine correttivo che si introduce quando τ_0 scavalca il valore $n\tau$ è nullo con tutte le sue derivate rispetto a τ_0 all'inizio del nuovo intervallo $(n\tau, (n+1)\tau)$. Infatti, posto $\tau_0 - n\tau = \Delta\tau_n$, si ha:

$$(2.8) \quad \frac{\partial^k}{\partial \tau_0^k} [\Phi_n(\tau_0, x) - \Phi_{n-1}(\tau_0, x)] = \frac{\exp \left[-\frac{x^2}{4\Delta\tau_n} \right]}{k_\infty^n \sqrt{4\pi\Delta\tau_n}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} L^{2j}(-1)^j H_{2(j+k)} \left(\frac{x}{\sqrt{2\Delta\tau_n}} \right) / (2\Delta\tau_n)^{j+k},$$

il cui limite per $\Delta\tau_n$ tendente a 0 è ovviamente nullo.

Considerazioni sull'andamento asintotico delle β_i mostrano che la serie (2.4) converge per qualunque valore di τ_0 e che essa rappresenta una funzione continua di τ_0 . Queste osservazioni fanno concludere che l'espressione della densità ottenuta dalla (1.1) mediante la (2.6) è una funzione continua di τ_0 , come deve essere.

L'origine dei termini « correttivi » si può illustrare partendo direttamente dalla equazione differenziale (1.2). Supponiamo, per semplicità, che sia $\tau_0 = \tau + \Delta\tau$ con $\Delta\tau < \tau$, e che il piano emittente sia nell'origine.

Ovviamente si ha:

$$(2.9) \quad \exp [\tau_0 D^2] \delta(x) = \exp [\tau D^2] \exp [\Delta\tau D^2] \delta(x) = \exp [\tau D^2] G_{\Delta\tau}(x),$$

dove:

$$(2.10) \quad G_{\Delta\tau}(x) = \frac{\exp \left[-\frac{x^2}{4\Delta\tau} \right]}{\sqrt{4\pi\Delta\tau}},$$

con che l'equazione (1.2) si scrive:

$$(2.11) \quad L^2 \rho''(x) - \rho(x) + k_\infty \exp [\tau D^2] \left[\rho(x) + \frac{\tau_c p S_0}{k_\infty} G_{\Delta\tau}(x) \right] = 0.$$

Si noti l'apparizione del termine gaussiano nella funzione di sorgente. Posto

$$\bar{\rho}(x) = \rho(x) + \frac{\tau_c p S_0}{k_\infty} G_{\Delta\tau}(x) = \rho(x) + f(x),$$

si ha la seguente equazione in $\bar{\rho}(x)$:

$$(2.12) \quad L^2 \bar{\rho}''(x) - \bar{\rho}(x) + k_\infty \exp [\tau D^2] \bar{\rho}(x) = -f(x) + L^2 f''(x).$$

Detti $A(\omega)$ e $B(\omega)$ i coefficienti dello sviluppo di $\bar{\rho}(x)$ e $f(x) - L^2 f''(x)$ in integrale di Fourier, vale la relazione:

$$(2.13) \quad A(\omega) = \frac{B(\omega)}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau \omega^2]}.$$

Ora si ha:

$$B(\omega) = \frac{\tau_c p S_0}{2\pi k_\infty} (1 + \omega^2 L^2) \exp[-\Delta \tau \omega^2],$$

e pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x) &= \frac{\tau_c p S_0}{2\pi k_\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \omega^2 L^2) \exp[-\Delta \tau \omega^2 + i\omega x] d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau \omega^2]} = \\ &= \frac{i\tau_c p S_0}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0 \beta_i^2 + i\beta_i |x|]}{\beta_i [L^2 + \tau(1 + \beta_i^2 L^2)]}, \end{aligned}$$

da cui infine per la densità termica:

$$(2.14) \quad \rho(x) = \frac{i\tau_c p S_0}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0 \beta_i^2 + i\beta_i |x|]}{\beta_i [L^2 + \tau(1 + \beta_i^2 L^2)]} - \frac{\tau_c p S_0}{k_\infty} \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4\Delta\tau}\right]}{\sqrt{4\pi\Delta\tau}}.$$

Nel caso generale ($\Delta\tau > \tau$) un procedimento ricorrente permette di ritrovare il risultato espresso dalla (2.6).

3. - Influenza del libero cammino medio dei neutroni nascenti.

Nei calcoli precedenti si è trascurato l'effetto dello sparpagliamento dei neutroni veloci di sorgente e di moltiplicazione. In altre parole si è ritenuto che il processo di rallentamento tradotto dalle equazioni della « age theory » fosse applicabile a partire dal punto in cui il neutrone veloce viene emesso; vale a dire si è assunta una sorgente artificiale delftiforme e una sorgente di moltiplicazione in ogni punto proporzionale alla densità termica locale. Questa approssimazione, spesso non soddisfacente, equivale ad assumere un libero cammino medio dei neutroni nascenti nullo.

Ci si propone qui di studiare l'influenza di un libero cammino medio non nullo dei neutroni nascenti. Si può tener conto di questo « sparpagliamento » con un procedimento, che pur non essendo rigoroso quanto alla ipotesi di partenza, porta tuttavia a risultati significativi e qualitativamente corretti. Detto procedimento, che viene qui adottato per ragioni di semplicità e brevità, consiste nell'assumere per le sorgenti artificiale e di moltiplicazione rispettivamente le espressioni seguenti:

$$(3.1) \quad S_0(x) = \frac{S_0 \gamma_0}{2} \exp[-\gamma_0 |x|],$$

e

$$(3.2) \quad S_1(x) = \frac{\gamma k_{\infty}}{2\tau_c p} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') \exp[-\gamma |x' - x|] dx',$$

dove γ_0 e γ sono gli inversi dei liberi cammini medi dei neutroni di energia E_0 e E_m ⁽⁵⁾.

Denotati con $B(\omega)$ e $C(\omega)$ i coefficienti dello sviluppo di Fourier di $S_0(x)$ e $S_1(x)$ si ha con ovvi calcoli:

$$(3.3) \quad B(\omega) = \frac{S_0 \gamma_0^2}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2},$$

e

$$(3.4) \quad C(\omega) = \frac{k_{\infty} \gamma^2 A(\omega)}{\tau_c p (\omega^2 + \gamma^2)},$$

dove $A(\omega)$ è al solito il coefficiente di Fourier di $\rho(x)$. Il termine di sorgente alla soglia termica, da introdurre nella equazione di diffusione, è dato da:

$$(3.5) \quad \tau_c s(x) = k_{\infty} \gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\omega) \exp[-\tau \omega^2 + i\omega x]}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega + \\ + \frac{p \tau_c S_0 \gamma_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0 \omega^2 + i\omega x]}{\omega^2 + \gamma_0^2} d\omega.$$

Introducendo (3.5) in tale equazione si ottiene per la $\rho(x)$:

$$(3.6) \quad \rho(x) = \frac{S_0 \tau_c p \gamma_0^2}{2\pi \gamma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega^2 + \gamma^2) \exp[-\tau_0 \omega^2 + i\omega x] d\omega}{(\omega^2 + \gamma_0^2) [(1 + \omega^2 L^2)(\omega^2 + \gamma^2)/\gamma^2 - k_{\infty} \exp[-\tau \omega^2]]}.$$

Questo integrale si può calcolare con procedimenti analoghi a quelli impiegati nel calcolo di (2.1).

Da notare che nella parte residuale (vedi (2.6)) comparirà un termine esponenziale del tipo $\exp[-\gamma_0 x]$. L'influenza di tale termine sul comportamento asintotico della densità verrà discusso nel n. successivo. Naturalmente, rispetto alla (2.6), sono anche modificate le posizioni dei poli β_i .

⁽⁵⁾ La funzione di sorgente da utilizzare è a rigore del tipo

$$-Ei(-k |x|).$$

Con tale sorgente va anche ricalcolata la (3.2).

4. - Comportamento asintotico delle soluzioni.

Si premettono le seguenti considerazioni utili ai fini della valutazione asintotica (per grandi valori positivi di x) di un integrale di Fourier:

$$(4.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp [i\omega x] d\omega ,$$

nel quale il coefficiente $A(\omega)$ presenti delle singolarità polari β_i (tutte situate fuori dell'asse reale); e sia inoltre tale che per ogni costante positiva prefissata $a \neq \mathcal{I}(\beta_i)$, per il resto arbitraria, e per ogni x positivo valgano le seguenti proprietà:

a) sia sempre possibile determinare una funzione reale e positiva $F(a, u)$ sommabile rispetto a u da $-\infty$ a $+\infty$ tale che per qualunque u si abbia:

$$(4.2) \quad |A(u + ia)| < F(a, u) ;$$

b) si abbia ($x > 0$)

$$(4.3) \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \int_0^a A(u + iv) \exp [i(u + iv)x] dv = 0 .$$

Sotto questa ipotesi si dimostra, che scritta la (4.1) sotto la forma

$$(4.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp [i\omega x] d\omega = \sum_i c_i \exp [i\beta_i x] + R(x) ,$$

(la \sum_i essendo estesa a tutti i β_i tali che $0 < \mathcal{I}(\beta_i) < a$) il resto $R(x)$ è maggiorato in modulo da $\exp [-ax]\varphi(a)$, essendo

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a, u) du .$$

Infatti considerando sul piano (ω) il contorno rettangolare indicato in figura (*) si ha:

$$\oint A(\omega) \exp [i\omega x] d\omega = \sum_i c_i \exp [i\beta_i x] ,$$

(*) I poli β_i indicati in figura riproducono schematicamente la distribuzione delle radici dell'equazione (1.4) $\Phi(\omega) = 0$. La retta che costituisce il percorso (3) è situata a distanza a dall'asse reale.

dove la \sum_i è estesa ai poli inclusi nel contorno di integrazione. Ricordando la (4.3) si ha per il resto $R(x)$ che figura nella (4.4)

$$R(x) = \int_{(3)} A(\omega) \exp[i\omega x] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} A(u + ia) \exp[i(u + ia)x] du,$$

e giusta la (4.2) si ha:

$$(4.5) \quad |R(x)| < \exp[-ax] \int_{-\infty}^{+\infty} F(a, u) du = \exp[-ax] \varphi(a),$$

che dimostra l'asserto.

Da queste considerazioni segue che sotto le ipotesi enunciate il comportamento asintotico di (4.1) è dato dai termini residuali $\sum_i c_i \exp[i\beta_i x]$ a

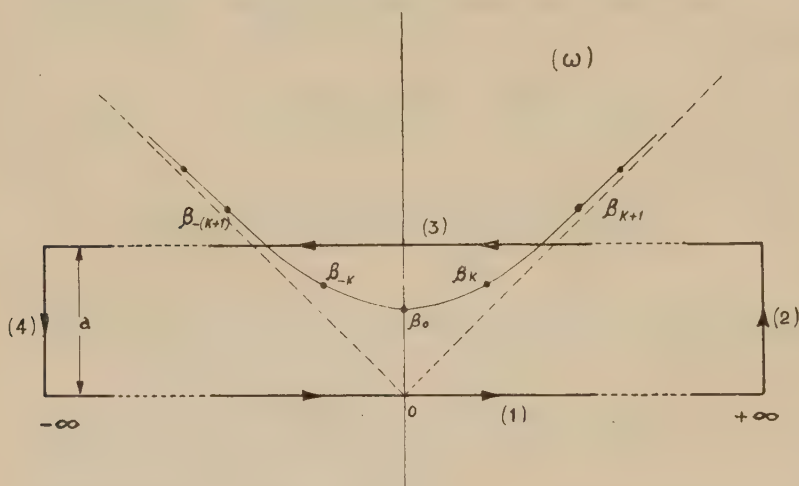


Fig. 1.

meno di una funzione $R(x)$ che converge più rapidamente del più convergente dei termini residuali presi in considerazione.

A titolo di esempio e di illustrazione dei concetti ora esposti consideriamo l'espressione asintotica delle (1.1) e (3.6), corrispondenti alle due approssimazioni in cui si trascura o si considera l'influenza del libero cammino medio dei neutroni nascenti:

a) *Espressione asintotica di (1.1).* Si ha:

$$(4.6) \quad \rho(x) \sim \frac{\tau_0 p S_0}{2} \frac{\exp[\tau_0 \alpha_0^2]}{\alpha_0 [L^2 + \tau(1 - \alpha_0^2 L^2)]} \exp[-\alpha_0 |x|],$$

dove $\alpha_0 = -i\beta_0$ e corrispondentemente al fatto che β_0 per $k_\infty < 1$ è situato sul

semiasse positivo immaginario, è $\alpha_0 > 0$. Poichè per le altre radici β_i (v. fig. 1) si ha $\mathcal{J}(\beta_i) > \mathcal{J}(\beta_0)$, il comportamento asintotico della densità è determinato dalla sola α_0 .

Nel caso di solo moderatore ($k_\infty = 0$) si ha $\alpha_0 = 1/L$ e la (4.6) si riduce a:

$$(4.7) \quad \rho(x) \sim \frac{\tau_0 p S_0}{2L} \exp [\tau_0/L^2 - |x|/L] ;$$

b) *Espressione asintotica di (3.6).* Si ha:

$$(4.8) \quad \rho(x) \sim A \exp [-|x|/l_0] + B \exp [-\alpha_0 |x|] ,$$

dove

$$(4.9) \quad A = \frac{S_0 \tau_0 p}{2} \frac{l_0(l_0^2 - l^2) \exp [\tau_0/l_0^2]}{(l_0^2 - L^2)(l_0^2 - l^2) - l_0^4 k_\infty \exp [\tau/l_0^2]} ,$$

$$(4.10) \quad B = \frac{S_0 \tau_0 p}{2} \frac{(1 - \alpha_0^2 l^2) \exp [\tau_0 \alpha_0^2]}{\alpha_0(1 - \alpha_0^2 l_0^2) \{ l^2(1 - \alpha_0^2 L^2) + (1 - \alpha_0^2 l_0^2)[L^2 + \tau(1 - \alpha_0^2 L^2)] \}} ,$$

$l_0 = 1/\gamma_0$, $l = 1/\gamma$ e $\alpha_0 = -i\beta_0$, β_0 essendo ora la radice puramente immaginaria (sul semipiano superiore) della equazione:

$$(4.11) \quad (1 + \omega^2 L^2)(1 + \omega^2 l^2) - k_\infty \exp [-\tau \omega^2] = 0 .$$

Nel caso di solo moderatore ($k_\infty = 0$) si ha:

$$(4.12) \quad \rho(x) \sim \frac{S_0 \tau_0 p}{2} \frac{1}{l_0^2 - L^2} \{ l_0 \exp [\tau_0/l_0^2 - |x|/l_0] - L \exp [\tau_0/L^2 - |x|/L] \} .$$

Si noti che il comportamento asintotico della densità dipende strettamente dai valori relativi di γ_0 e α_0 . In particolare, grandi liberi cammini medi dei neutroni nascenti di sorgente possono mascherare l'effetto della moltiplicazione sul comportamento asintotico.

APPENDICE

Si tratta di dimostrare che

$$(A.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [i\beta_i |t-z|]}{\Phi'(\beta_i)} \exp [\tau_0 D_i^2] \delta(t-z_0) dt = \\ = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Phi'(\beta_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i\beta_i |t-z|] \exp [\tau_0 D_i^2] \delta(t-z_0) dt .$$

Tenendo presente che:

$$(A.2) \quad \exp [\tau_0 D_t^2] \delta(t - z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-\tau_0 \omega^2 + i\omega(t - z_0)] d\omega = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau_0}} \exp \left[-\frac{(t - z_0)^2}{4\tau_0} \right],$$

e posto $t - z_0 = x$, $z - z_0 = u$, basterà dimostrare che è lecito invertire il segno di $\int_{-\infty}^{+\infty}$ con quello di $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ nella seguente espressione:

$$(A.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{x^2}{4\tau_0} \right] \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [i\beta_l |x - u|]}{\Phi'(\beta_l)} dx.$$

Osserviamo che il comportamento asintotico delle β_l è il seguente:

$$(A.4) \quad \beta_l \sim \sqrt{\frac{\pi |l|}{\tau}} (i \pm 1),$$

dove il segno (+) va preso in corrispondenza di $l > 0$ e il segno (—) in corrispondenza di $l < 0$.

La serie che compare nella (A.3) è uniformemente convergente in tutto l'intervallo di integrazione.

Infatti da un certo l in poi la serie dei moduli dei suoi termini è maggiorata da una serie numerica a termini positivi del tipo:

$$(A.5) \quad c \sum_l \frac{1}{l^{3/2}}.$$

L'uniforme convergenza della serie citata consente l'inversione del segno di somma con quello di integrale per qualunque intervallo finito di integrazione.

Affinchè tale inversione sia lecita anche per l'integrale improprio basterà dimostrare che sono nulli i due limiti seguenti:

$$(A.6) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_X^{+\infty} \frac{\exp [i\beta_l(x - u)]}{\beta_l[L^2 + \tau(1 + \beta_l^2 L^2)]} \exp \left[-\frac{x^2}{4\tau_0} \right] dx,$$

$$(A.7) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-X} \frac{\exp [i\beta_l(u - x)]}{\beta_l[L^2 + \tau(1 + \beta_l^2 L^2)]} \exp \left[-\frac{x^2}{4\tau_0} \right] dx.$$

Ciò segue immediatamente dalla (A.5) che ci permette di ridurre i limiti stessi alla forma

$$(A.8) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} c \left(\sum_l \frac{1}{l^{3/2}} \right) \int_X^\infty \exp \left[-\frac{x^2}{4\tau_0} \right] dx,$$

ovviamente nulla.

SUMMARY

Results obtained in a preceeding paper on the thermal neutron distribution function in multiplying media are extended to the case in which the injected neutron energy is higher than the fission neutron energy. Corrections for a non vanishing mean free path of nascent neutron are taken into account and their influence on the solutions' asymptotical behaviour is discussed. A demonstration of the equivalence between two methods adopted in a previons paper is also given.

Sullo sparpagliamento dei fotoni di uno sciame (*).

A. BORSELLINO

Istituto di Fisica del Politecnico - Milano

(ricevuto il 21 Giugno 1950)

Riassunto. — Si calcolano le quantità $\langle \theta^2 \rangle$, $\langle \theta r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ che caratterizzano lo sparpagliamento dei fotoni di uno sciame in funzione della profondità (trascurando la ionizzazione). Per il calcolo si fa uso delle equazioni di diffusione di Landau a cui soddisfano le funzioni di distribuzione angolare degli elettroni e dei fotoni e delle trasformazioni di Mellin-Laplace-Fourier. Si ottengono per questa via più diretta i risultati per lo sparpagliamento degli elettroni già ottenuti in un lavoro precedente col metodo di Nordheim. Sia per gli elettroni che per i fotoni si valuta lo sparpagliamento mediato sulla profondità e si trova che esso coincide con lo sparpagliamento nel massimo dello sciame. Vien valutato anche lo sparpagliamento « integrale », cioè lo sparpagliamento medio delle particelle di energia maggiore di un limite assegnato, che presenta un maggiore interesse per i confronti sperimentali. In appendice è mostrata la equivalenza del metodo di Landau con quello di Nordheim.

1. — Introduzione.

Recentemente ⁽¹⁾ ho mostrato come si possano valutare analiticamente le quantità $\langle \theta^2 \rangle_t$, $\langle \theta r \rangle_t$, $\langle r^2 \rangle_t$ che caratterizzano lo sparpagliamento angolare e laterale degli *elettroni* di uno sciame alle varie profondità (in approssimazione « A »).

Si tratta di valutare note espressioni date da NORDHEIM ⁽²⁾ che esprimono

(*) I risultati essenziali di questo lavoro sono stati esposti in una breve comunicazione al « Colloque International de Physique Théorique », tenuto a Parigi dal 24 al 29 Aprile 1950.

⁽¹⁾ A. BORSELLINO: *Nuovo Cimento*, **6**, 543 (1949); **7**, 323 (1950). Citato con II.

⁽²⁾ L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **59**, 920 A (1941); riportate in ⁽³⁾.

le quantità sopradette mediante gli spettri differenziali elettronici $\pi(E_0, E, t)$ ⁽³⁾ della teoria unidimensionale, considerando lo sparpagliamento degli elettroni ad una certa profondità t come conseguenza della diffusione multipla micro-coulombiana, alle quote superiori, degli elettroni delle generazioni precedenti.

Per lo sparpagliamento dei fotoni sono state usate da ROBERG e NORDHEIM ⁽⁴⁾ espressioni analoghe. Queste sono alquanto più complicate e si prestano meno ad una valutazione analitica. Tuttavia è possibile definire in modo più soddisfacente le stesse quantità a partire direttamente dalle funzioni di distribuzione angolare e laterale per gli elettroni ed i fotoni. Una valutazione per questa via è dovuta a LANDAU ⁽⁵⁾ che ha calcolato così la deflessione media $\langle \theta^2 \rangle$ degli elettroni e dei fotoni (per alte energie). Tuttavia le approssimazioni introdotte ed alcuni errori di calcolo fanno sì che le espressioni date da LANDAU non siano corrette.

Mi propongo ora di mostrare come, col metodo di Landau si possano valutare analiticamente, oltre $\langle \theta^2 \rangle_t$, anche $\langle \theta r \rangle_t$ e $\langle r^2 \rangle_t$, tanto per gli elettroni che per i fotoni dello sciame.

Nell'impostazione del problema si terrà conto della perdita di energia degli elettroni per ionizzazione. Con l'uso delle trasformate funzionali di Mellin-Laplace-Fourier il problema è ridotto ad equazioni alle differenze finite. Riservandoci di ritornare prossimamente sul problema così impostato che interessa il comportamento alle basse energie, il problema è risolto per il caso delle alte energie, cioè trascurando la ionizzazione. In tale caso si ottengono equazioni algebriche ordinarie e lo sparpagliamento viene determinato mediante inversione delle trasformate di Mellin-Laplace. È possibile mostrare che il metodo ora seguito è equivalente a quello basato sulle formule di Nordheim (appendice).

I risultati per lo sparpagliamento degli elettroni coincidono con quelli già ottenuti in II; la deflessione angolare media dei fotoni risulta sensibilmente minore di quella degli elettroni, ciò che è in accordo con le precedenti valutazioni di MOLIÈRE ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ relative al massimo dello sciame.

La dipendenza dalla profondità è sensibile anche per i fotoni. Lo sparpagliamento mediato sulla profondità, come calcolato per i fotoni da ROBERG e NORDHEIM ⁽⁴⁾, si mostra che coincide col valore che esso ha nel massimo.

Il metodo consente anche di calcolare lo sparpagliamento *integrale*, cioè

⁽³⁾ B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941); useremo generalmente i simboli di questi autori.

⁽⁴⁾ J. ROBERG e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 444 (1949).

⁽⁵⁾ L. LANDAU: *Journ. of Phys. USSR*, **3**, 237 (1940).

⁽⁶⁾ G. MOLIÈRE, in W. HEISENBERG: *Vorträge über kosmische Strahlung* (Berlin, 1943), Ber. n. 3.

⁽⁷⁾ G. MOLIÈRE: *Zeits. f. Phys.*, **125**, 250 (1949).

⁽⁸⁾ G. MOLIÈRE: *Phys. Rev.*, **77**, 715 (1950).

lo sparpagliamento medio che presentano gli elettroni ed i fotoni di energia maggiore di E , nonchè il valor medio di questo sulle profondità.

2. - Funzioni di distribuzione. Sparpagliamento quadratico medio.

Indichiamo con f e g le funzioni di distribuzione degli elettroni e dei fotoni dello sciame. Precisamente $f(E, t, \theta, \mathbf{r}) dE d\tau_\theta d\tau_r$ rappresenti il numero degli elettroni alla profondità t , con energia fra E e $E + dE$, che attraversano l'elemento di superficie $d\tau_r$ con scostamento laterale \mathbf{r} , in una direzione compresa nell'angolo solido $d\tau_\theta$ intorno a θ ; analogamente $g(W, t, \theta, \mathbf{r}) dW d\tau_\theta d\tau_r$, per i fotoni.

Le equazioni di diffusione di LANDAU ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ a cui soddisfano f e g sono:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -Af + Bg + \frac{1}{4} \frac{K^2}{E^2} \nabla_\theta^2 f - \theta \times \nabla_r f + \beta \frac{\partial f}{\partial E}, \\ \frac{\partial g}{\partial t} = Cf - \sigma_0 g - \theta \times \nabla_r g, \end{cases}$$

A, B, C sono gli operatori integrali che compaiono nella ordinaria teoria unidimensionale degli sciami e operano sull'energia; $\sigma_0 = 0,773$; $K = 21$ MeV; ∇_r e ∇_θ sono gli operatori gradiente nei piani \mathbf{r} e θ rispettivamente. Infine nella prima equazione l'ultimo termine tiene conto della perdita di energia per ionizzazione.

Le (2) vanno integrate con le condizioni iniziali:

$$(2) \quad \begin{cases} f(E, 0, \theta, \mathbf{r}) = \delta(E - E_0) \delta(\theta) \delta(\mathbf{r}), \\ g(W, 0, \theta, \mathbf{r}) = 0, \end{cases}$$

per uno sciame generato da un elettrone di energia E_0 ; oppure:

$$(2') \quad \begin{cases} f(E, 0, \theta, \mathbf{r}) = 0, \\ g(W, 0, \theta, \mathbf{r}) = \delta(W - W_0) \delta(\theta) \delta(\mathbf{r}), \end{cases}$$

per uno sciame generato da un fotone di energia W_0 .

A partire dalle funzioni di distribuzione f e g possiamo definire la deflessione quadratica media $\langle \theta^2 \rangle$, lo scostamento laterale quadratico medio $\langle r^2 \rangle$ e il valore medio di $\langle \theta r \rangle$.

Precisamente per gli elettroni porremo:

$$(3) \quad \begin{cases} \langle \theta_x^2 \rangle_{E, t} = \frac{1}{\pi(E, t)} \int \theta_x^2 f(E, t, \theta, \mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \\ \langle \theta_x r \rangle_{E, t} = \frac{1}{\pi(E, t)} \int \theta_x r f(E, t, \theta, \mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \\ \langle r^2 \rangle_{E, t} = \frac{1}{\pi(E, t)} \int r^2 f(E, t, \theta, \mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \end{cases}$$

e analogamente per i fotoni:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle \theta_x^2 \rangle_{W,t} &= \frac{1}{\gamma(W,t)} \int \theta_x^2 g(W,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \\ \langle \theta_x x \rangle_{W,t} &= \frac{1}{\gamma(W,t)} \int \theta_x x g(W,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \\ \langle x^2 \rangle_{W,t} &= \frac{1}{\gamma(W,t)} \int x^2 g(W,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r. \end{aligned} \right.$$

Con $\pi(E,t)$ e $\gamma(W,t)$ si sono indicati gli spettri differenziali elettronico e fotonico della teoria unidimensionale:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi(E,t) &= \int f(E,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \\ \gamma(W,t) &= \int g(W,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r. \end{aligned} \right.$$

È conveniente per indicare gli integrali che occorre valutare, introdurre le abbreviazioni:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} I_n(E,t) &= \int \theta_x^{2-n} x^n f(E,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \\ J_n(W,t) &= \int \theta_x^{2-n} x^n g(W,t,\theta,\mathbf{r}) d\tau_\theta d\tau_r, \end{aligned} \right.$$

con $n = 0, 1, 2$. Così facendo le (4) e le (5) si scrivono:

$$(7) \quad \langle \theta_x^{2-n} x^n \rangle_{E,t} = \frac{I_n(E,t)}{\pi(E,t)}, \quad \langle \theta_x^{2-n} x^n \rangle_{W,t} = \frac{J_n(W,t)}{\gamma(W,t)}.$$

Osservando che $\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2$, $r^2 = x^2 + y^2$ e che $\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle$, $\langle \theta_x \theta_y \rangle = 0$, etc., si ha inoltre:

$$(8) \quad \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{E,t} = \frac{2I_n(E,t)}{\pi(E,t)}, \quad \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{W,t} = \frac{2J_n(W,t)}{\gamma(W,t)}.$$

Lo sparpagliamento mediato su tutto lo sviluppo longitudinale dello sciame è poi definito da:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\langle \theta^{2-n} r^n \rangle_E} &= \frac{\int_0^\infty \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{E,t} \pi(E,t) dt}{\int_0^\infty \pi(E,t) dt} = \frac{2}{z_\pi(E)} \int_0^\infty I_n(E,t) dt, \\ \overline{\langle \theta^{2-n} r^n \rangle_W} &= \frac{\int_0^\infty \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{W,t} \gamma(W,t) dt}{\int_0^\infty \gamma(W,t) dt} = \frac{2}{z_\gamma(W)} \int_0^\infty J_n(W,t) dt, \end{aligned} \right.$$

dove $z_\pi(E)$ e $z_\gamma(W)$ sono le tracce elettronica e fotonica differenziali.

Si può definire ancora uno sparpagliamento medio, ad una certa profondità per le particelle di energia maggiore di E (sparpagliamento *integrale*):

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{E,t} &= \frac{\int_E^\infty \langle \Theta^{2-n} r^n \rangle_{E',t} \pi(E', t) dE'}{\int_E^\infty \pi(E', t) dE'} = \frac{2}{\Pi(E, t)} \int_E^\infty I_n(E', t) dE', \\ \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{W,t} &= \frac{\int_W^\infty \langle \Theta^{2-n} r^n \rangle_{W',t} \gamma(W', t) dW'}{\int_W^\infty \gamma(W', t) dW'} = \frac{2}{\Gamma(W, t)} \int_W^\infty J_n(W', t) dW', \end{aligned} \right.$$

in cui $\Pi(E, t)$ e $\Gamma(W, t)$ sono gli spettri integrali; e infine i valori mediati sulle varie profondità delle (10):

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \overline{\langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_E} &= \frac{\int_0^\infty \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{E,t} \Pi(E, t) dt}{\int_0^\infty \Pi(E, t) dt} = \frac{2}{z_\Pi(E)} \int_0^\infty dt \int_E^\infty I_n(E', t) dE', \\ \overline{\langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_W} &= \frac{\int_0^\infty \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{W,t} \Gamma(W, t) dt}{\int_0^\infty \Gamma(W, t) dt} = \frac{2}{z_\Gamma(W)} \int_0^\infty dt \int_W^\infty J_n(W', t) dW', \end{aligned} \right.$$

in cui $z_\Pi(E)$ e $z_\Gamma(W)$ sono le tracce elettronica e fotonica integrali.

3. - Trasformate di $I_n(E, t)$ e $J_n(W, t)$.

Il calcolo delle quantità che interessano dipende dagli integrali I_n e J_n che essenzialmente sono i momenti quadratici delle due distribuzioni di elettroni e fotoni intorno all'asse dello sciami.

LANDAU ⁽⁵⁾ ha cercato di valutare direttamente dalle equazioni (1) le funzioni I_0 e J_0 , la conoscenza delle quali fornisce la deflessione angolare $\langle \theta^2 \rangle$ degli elettroni e dei fotoni. A questo scopo, oltre che trascurare la ionizzazione, è costretto ad eseguire delle approssimazioni di non semplice controllo.

Per le funzioni I_2 e J_2 LANDAU dice che si ottengono espressioni troppo complicate e riporta quindi solo i risultati numerici relativi a $\langle r^2 \rangle$.

Tanto questi valori che le espressioni date per $\langle \theta^2 \rangle$ tuttavia risultano errati.

Ci proponiamo di mostrare come l'uso delle trasformate di Mellin-Laplace, di nota utilità nella teoria unidimensionale degli sciami ⁽³⁾, si presenti utile anche nel caso attuale.

Se si tien conto della ionizzazione, le trasformate delle funzioni $I_n(E, t)$ e $J_n(W, t)$ soddisfano ad equazioni lineari alle differenze finite. Trascurando la ionizzazione le equazioni diventano algebriche ordinarie e quindi permettono la valutazione esatta delle trasformate stesse. È possibile mostrare inoltre con qualche passaggio algebrico che i casi $n = 1, 2$ non sono più complicati del caso $n = 0$.

A questo scopo consideriamo le trasformate di Mellin-Laplace-Fourier delle funzioni di distribuzione f e g :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{T}\{f\} &= \mathcal{T}_f(s, \lambda, \zeta, \rho) = \\ &= \int_0^\infty E^s dE \int_0^\infty \exp[-\lambda t] dt \iint_{-\infty}^\infty \exp[-i\zeta \times \theta - i\rho \times r] f(E, t, \theta, r) d\tau_\theta d\tau_r, \\ \mathcal{T}\{g\} &= \mathcal{T}_g(s, \lambda, \zeta, \rho) = \\ &= \int_0^\infty W^s dW \int_0^\infty \exp[-\lambda t] dt \iint_{-\infty}^\infty \exp[-i\zeta \times \theta - i\rho \times r] g(W, t, \theta, r) d\tau_\theta d\tau_r. \end{aligned} \right.$$

Tenendo presenti le (5) si ha subito che:

$$(13) \quad \mathcal{T}_f(s, \lambda, 0, 0) = \mathcal{V}_{\mathcal{I}_n}(s, \lambda), \quad \mathcal{T}_g(s, \lambda, 0, 0) = \mathcal{V}_{\mathcal{J}_n}(s, \lambda),$$

ove $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_n}(s, \lambda)$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_n}(s, \lambda)$ sono le trasformate di Mellin-Laplace degli spettri differenziali. Analogamente dalle (6) si ha, per $n = 0, 1, 2$:

$$(14) \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}_f}{\partial \zeta_x^{2-n} \partial \rho_x^n} \right)_{\zeta=\rho=0} = -\mathcal{V}_{\mathcal{I}_n}(s, \lambda), \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}_g}{\partial \zeta_x^{2-n} \partial \rho_x^n} \right)_{\zeta=\rho=0} = -\mathcal{V}_{\mathcal{J}_n}(s, \lambda),$$

in cui $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_n}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_n}$ sono appunto le trasformate di Mellin-Laplace di I_n e J_n .

Dalle equazioni di diffusione (1) per f e g è possibile dedurre un sistema di equazioni a cui soddisfano le trasformate $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_n}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_n}$. Per ottenerlo moltiplichiamo ciascun termine che compare nelle (1) per $\theta^{2-n} x^n$ ed eseguiamo sui prodotti così ottenuti la trasformazione funzionale \mathcal{T} definita dalle (12).

Tenendo conto delle condizioni iniziali (2) ed eseguendo delle integrazioni per parti, si ha per esempio:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \theta_x^{2-n} x^n \right\} &= \lambda \mathcal{T} \{ f \theta_x^{2-n} x^n \} = -\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{T}_f}{\partial \zeta_x^{2-n} \partial \rho_x^n}, \\ \mathcal{T} \left\{ A f \theta_x^{2-n} x^n \right\} &= -A(s) \frac{\partial^2 \mathcal{T}_f}{\partial \zeta_x^{2-n} \partial \rho_x^n}, \\ \mathcal{T} \left\{ \theta_x \frac{\partial f}{\partial x} \theta_x^{2-n} x^n \right\} &= \rho_x \frac{\partial^3 \mathcal{T}_f}{\partial \zeta_x^{3-n} \partial \rho_x^n} + n \frac{\partial^2 \mathcal{T}_f}{\partial \zeta_x^{3-n} \partial \rho_x^{n-1}}, \end{aligned}$$

ed espressioni analoghe. Nel sistema così ottenuto poniamo $\zeta = \rho = 0$. Tenendo presenti le (14) si ottiene un sistema di equazioni nelle trasformate che si può scrivere, per $n = 0, 1, 2$:

$$(15) \quad \begin{cases} [\lambda + A(s)]\mathfrak{D}_{I_n}(s, \lambda) - B(s)\mathfrak{D}_{J_n}(s, \lambda) = \delta_{n1}\mathfrak{D}_{I_0}(s, \lambda) + \\ \quad + 2\delta_{n2}\mathfrak{D}_{I_1}(s, \lambda) - \beta s\mathfrak{D}_{I_n}(s-1, \lambda) + (1/2)K^2\delta_{n0}\mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda), \\ (\lambda + \sigma_0)\mathfrak{D}_{J_n}(s, \lambda) - C(s)\mathfrak{D}_{I_n}(s, \lambda) = \delta_{n1}\mathfrak{D}_{J_0}(s, \lambda) + 2\delta_{n2}\mathfrak{D}_{J_1}(s, \lambda), \end{cases}$$

dove $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ sono le funzioni così indicate nella teoria unidimensionale degli sciami e δ_{nm} è il solito simbolo di Kronecker.

Volendo tener conto della ionizzazione le equazioni risultano lineari alle differenze finite. Inoltre occorre la conoscenza della trasformata $\mathfrak{D}_{\pi}(s, \lambda)$ dello spettro elettronico in approssimazione « B ».

Riservandoci di ritornare su queste questioni interessanti le basse energie, limitiamoci ora al caso delle alte energie, per cui cioè sia trascurabile la perdita di energia per ionizzazione ($\beta = 0$). Il sistema (15) diventa algebrico e si possono ricavare facilmente le trasformate \mathfrak{D}_{I_n} e \mathfrak{D}_{J_n} .

Ponendo dapprima $n = 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} [\lambda + A(s)]\mathfrak{D}_{I_0}(s, \lambda) - B(s)\mathfrak{D}_{J_0}(s, \lambda) = \frac{1}{2} K^2 \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda) \\ - C(s)\mathfrak{D}_{I_0}(s, \lambda) + (\lambda + \sigma_0)\mathfrak{D}_{J_0}(s, \lambda) = 0, \end{cases}$$

e scrivendo come di solito:

$$(16) \quad (\lambda + \sigma_0)[\lambda + A(s)] - B(s)C(s) = [\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)],$$

si ha

$$(17_0) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{I_0}(s, \lambda) = \frac{1}{2} K^2 \frac{\lambda + \sigma_0}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda), \\ \mathfrak{D}_{J_0}(s, \lambda) = \frac{1}{2} K^2 \frac{C(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda). \end{cases}$$

Ponendo in (15) successivamente $n = 1$ e $n = 2$ se ne ricava:

$$(17_1) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{I_1}(s, \lambda) = \frac{1}{2} K^2 \frac{(\lambda + \sigma_0)^2 + B(s)C(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)]^2[\lambda - \lambda_2(s)]^2} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda), \\ \mathfrak{D}_{J_1}(s, \lambda) = \frac{1}{2} K^2 C(s) \frac{2\lambda + \sigma_0 + A(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)]^2[\lambda - \lambda_2(s)]^2} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda); \end{cases}$$

$$(17_2) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{I_2}(s, \lambda) = K^2 \frac{(\lambda + \sigma_0)^3 - B(s)C(s)[\lambda + A(s)]}{[\lambda - \lambda_1(s)]^3[\lambda - \lambda_2(s)]^3} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda), \\ \mathfrak{D}_{J_2}(s, \lambda) = K^2 C(s) \times \\ \times \frac{(\lambda + \sigma_0)^2 + B(s)C(s) + [\lambda + A(s)][2\lambda + \sigma_0 + A(s)]}{[\lambda - \lambda_1(s)]^3[\lambda - \lambda_2(s)]^3} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda). \end{cases}$$

Le espressioni così ottenute, per $n = 1$ e $n = 2$ appaiono piuttosto complicate. Tuttavia, utilizzando la (16) e ponendo:

$$(18) \quad \begin{cases} H_1(s) = \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, & H_2(s) = -\frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \\ L_1(s) = \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} = \frac{L(s)}{\sqrt{s}}, \end{cases}$$

dove $H_1(s)$, $H_2(s)$, $L(s)$ sono quantità così indicate nel citato lavoro di ROSSI e GREISEN ⁽³⁾, con qualche passaggio algebrico, le (17) possono essere scritte insieme nella forma sintetica:

$$(19) \quad \mathfrak{D}_{I_n}(s, \lambda) = \frac{n!}{2} K^2 \left\{ \frac{H_1(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)]^{n+1}} + \frac{H_2(s)}{[\lambda - \lambda_2(s)]^{n+1}} \right\} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda),$$

$$(19') \quad \mathfrak{D}_{J_n}(s, \lambda) = \frac{n!}{2} K^2 L_1(s) \left\{ \frac{1}{[\lambda - \lambda_1(s)]^{n-1}} - \frac{1}{[\lambda - \lambda_2(s)]^{n-1}} \right\} \mathfrak{D}_{\pi}(s-2, \lambda).$$

Osservando che nell'approssimazione considerata:

$$(20) \quad \mathfrak{D}_{\pi}(s, \lambda) = \frac{\lambda + \sigma_0}{C(s)} \mathfrak{D}_{\gamma}(s, \lambda) = \frac{\lambda + \sigma_0}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} E_0^s,$$

se lo sciame è generato da un elettrone primario, oppure:

$$(20') \quad \mathfrak{D}_{\pi}(s, \lambda) = \frac{B(s)}{\lambda - A(s)} \mathfrak{D}_{\gamma}(s, \lambda) = \frac{B(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} W_0^s,$$

per un fotone primario, il problema di determinare le trasformate di Mellin-Laplace delle $I_n(E, t)$ e $J_n(W, t)$ è così risolto dalle (19) e (20).

4. - Inversione delle trasformate. Risultati.

Per calcolare lo sparpagliamento quadratico medio in funzione dell'energia e della profondità occorre invertire le trasformate di Mellin-Laplace e calcolare le funzioni $I_n(E, t)$ e $J_n(W, t)$.

Per semplicità di scrittura poniamo:

$$(21) \quad M_n(s, \lambda) = n! \left\{ \frac{H_1(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)]^{n+1}} + \frac{H_2(s)}{[\lambda - \lambda_2(s)]^{n+1}} \right\},$$

$$(21') \quad N_n(s, \lambda) = n! L_1(s) \frac{H_1(s-2)}{L_1(s-2)} \left\{ \frac{1}{[\lambda - \lambda_1(s)]^{n-1}} - \frac{1}{[\lambda - \lambda_2(s)]^{n-1}} \right\}.$$

Applicando la trasformazione inversa di Mellin sulle (19) otteniamo le trasformate di Laplace di I_n e J_n . Per esempio si ha:

$$\mathcal{L}_{I_n}(E, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{E^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} M_n(s+2, \lambda) \frac{\lambda + \sigma_0}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s ds.$$

Se $E \ll E_0$ il contributo principale all'integrale proviene dal polo più a destra sull'asse reale, cioè quello per cui $\lambda_1(s) = \lambda$ e si ottiene:

$$(22) \quad \mathcal{L}_{I_n}(E, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{E^2} M_n(s+2, \lambda) \mathcal{L}_\pi(E, \lambda),$$

in cui s è tale che $\lambda_1(s) = \lambda$ e $\mathcal{L}_\pi(E, \lambda)$ è la trasformata di Laplace dello spettro elettronico.

In modo analogo si ottiene:

$$(22') \quad \mathcal{L}_{J_n}(W, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{W^2} N_n(s+2, \lambda) \mathcal{L}_\gamma(W, \lambda),$$

osservando che il rapporto $\mathcal{O}_{\mathcal{L}_\pi}(s, \lambda)/\mathcal{O}_{\mathcal{L}_\gamma}(s, \lambda)$, che risulta dalle (20) e (20'), in virtù della (16) è lo stesso nei due casi e vale $H_1(s)/L_1(s)$ quando $\lambda = \lambda_1(s)$. Si ha perciò che lo sparpagliamento non dipende dal tipo di primario dello sciamе.

Applicando la trasformazione inversa di Laplace si ottiene:

$$(23) \quad I_n(E, t) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{E^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} M_n(s+2, \lambda) \exp[\lambda t] \mathcal{L}_\pi(E, \lambda) d\lambda.$$

Il fattore M_n sotto il segno è un fattore che varia molto più lentamente degli altri fattori. Se si trascura la sua variazione si ottiene:

$$(24) \quad I_n(E, t) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{E^2} M_n(s+2, \lambda_1(s)) \cdot \pi(E, t),$$

e quindi per le (8) e (21):

$$(25) \quad \langle \theta^{2-n} \gamma^n \rangle_{E, t} = \\ = n! \left\{ \frac{H_1(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^{n+1}} + \frac{H_2(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^{n+1}} \right\} \frac{K^2}{E^2} = \delta_n \frac{K^2}{E^2},$$

che coincide col risultato già trovato in II.

Analogamente per lo sparpagliamento dei fotoni si ottiene:

$$(25') \quad \langle \theta^{2-n} \gamma^n \rangle_{W, t} = n! H_1(s) \frac{L_1(s+2)}{L_1(s)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^{n+1}} - \frac{1}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^{n+1}} \right\} \frac{K^2}{W^2} = \eta_n \frac{K^2}{W^2}.$$

Nelle (25) il parametro s è legato all'energia e alla profondità della relazione:

$$(26) \quad \lg \frac{E_0}{E} + t \lambda_1'(s) = 0;$$

nelle (25') è invece:

$$(26') \quad \lg \frac{E_0}{W} - \frac{1}{2s} + t\lambda_1(s) = 0.$$

Volendo tener conto della lenta variazione di M_n in (23), le (25) risulterebbero moltiplicate per un fattore del tipo dato in II, formula (18); analogamente per le (25'). Lo sparpagliamento dei fotoni nel massimo dello sciame si ottiene ponendo $s = 1$ e si ha dalla (25'):

$$\langle \theta^2 \rangle_{W, t_m} = 0,176 \frac{K^2}{W^2}, \quad \langle \theta r \rangle_{W, t_m} = 0,349 \frac{K^2}{W^2}, \quad \langle r^2 \rangle_{W, t_m} = 1,128 \frac{K^2}{W^2}.$$

I valori medi sulla profondità ⁽⁴⁾, definiti dalle (9), si calcolano immediatamente osservando che:

$$\int_0^\infty I_n(E, t) dt = \mathcal{L}_{I_n}(E, 0),$$

mentre $z_n(E) = L_n(E, 0)$, quindi dalle (22) si ricava, essendo $s = 1$ quando $\lambda = 0$, che:

$$(28) \quad \overline{\langle \theta^{2-n} r^n \rangle} = \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{t_m},$$

cioè i valori medi sulla profondità coincidono con i valori nel massimo sia per gli elettroni che per i fotoni.

Per calcolare infine lo sparpagliamento *integrale* definito dalle (10) occorre valutare:

$$I_n^*(E, t) = \int_E^\infty I_n(E', t) dE',$$

e l'analogo $J_n^*(W, t)$. Ora la trasformata di Mellin-Laplace di $I_n^*(E, t)$ è:

$$\mathfrak{O}_{I_n^*}(s, \lambda) = \frac{1}{s+1} \mathfrak{O}_{I_n}(s+1, \lambda) = \frac{1}{2} K^2 \frac{1}{s+1} M_n(s+1, \lambda) \mathfrak{O}_\pi(s-1, \lambda),$$

quindi, invertendo la trasformazione di Mellin, si ottiene la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}_{I_n^*}(E, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{E^2} \frac{s}{s+2} M_n(s+2, \lambda) \cdot \mathcal{L}_\Pi(E, \lambda),$$

con s tale che $\lambda_1(s) = \lambda$. Invertendo ora la trasformazione di Laplace si ricava, nella stessa approssimazione delle (24):

$$I_n^*(E, t) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{E^2} \frac{s}{s+2} M_n(s+2, \lambda) \cdot \Pi(E, t),$$

e quindi dalla (10)

$$\langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{E,t} = \frac{s}{s+2} M_n(s+2, \lambda_1(s)) \frac{E^2}{K^2},$$

cioè

$$(31) \quad \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{E,t} = \frac{s}{s+2} \delta_n \frac{K^2}{E^2},$$

con s dato da:

$$(32) \quad \lg \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s} + t\lambda'_1(s) = 0;$$

in modo analogo lo sparpagliamento medio dei fotoni di energia maggiore di W risulta dalla:

$$(31') \quad \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{W,t} = \frac{s}{s+2} \eta_n \frac{K^2}{W^2},$$

con s dato ora da:

$$(32') \quad \lg \frac{E_0}{W} - \frac{3}{2s} + t\lambda'_1(s) = 0.$$

Infine, procedendo come per la (28), si vede facilmente che anche lo sparpagliamento integrale mediato sulla profondità, definito in (11), coincide con il valore nel massimo dello sciame:

$$\overline{\langle \Theta^{2-n} R^n \rangle} = \langle \Theta^{2-n} R^n \rangle_{t_m},$$

sia per gli elettroni che per i fotoni. Tra i valori medi dello sparpagliamento integrale e differenziale sussiste quindi la stessa relazione che si ha nel massimo, e per le (31) si ha:

$$\overline{\langle \Theta^{2-n} R^n \rangle} = \frac{1}{3} \overline{\langle \Theta^{2-n} \eta^n \rangle},$$

Nella tab. I sono dati i valori numerici dei coefficienti η_n che compaiono nella formula (25') per lo sparpagliamento dei fotoni. I valori numerici di δ_n che compaiono nella (25) sono stati dati in II. Le formule (31) e (31') permettono di calcolare immediatamente lo sparpagliamento integrale degli elettroni e dei fotoni. I valori riportati sono calcolati con l'uso delle tabelle date da JANOSSY ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ L. JANOSSY: *Cosmic Rays* (London, 1948).

TABELLA I. - *Sparpagliamento dei fotoni in funzione della profondità* (in approssimazione « A »). I valori riportati nella 2^a, 3^a, 4^a colonna danno i coefficienti di K^2/W^2 che compaiono nelle formule (25') per $\langle \theta^2 \rangle$, $\langle \theta r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$. Nell'ultima colonna è riportato il rapporto tra la deflessione angolare dei fotoni e quella degli elettroni della stessa energia.

S	η_0	η_1	η_2	η_0/δ_0
0,1	0,00664	0,00272	0,00198	0,0353
0,2	0,0183	0,0109	0,00980	0,0705
0,3	0,0333	0,0251	0,0290	0,105
0,4	0,0509	0,0453	0,0618	0,139
0,5	0,0693	0,0748	0,124	0,171
0,6	0,090	0,111	0,212	0,201
0,7	0,111	0,156	0,344	0,231
0,8	0,133	0,210	0,527	0,258
0,9	0,155	0,275	0,783	0,285
1,0	0,176	0,349	1,128	0,309
1,1	0,199	0,442	1,618	0,333
1,2	0,222	0,552	2,28	0,355
1,3	0,246	0,680	3,16	0,378
1,4	0,264	0,818	4,20	0,395
1,5	0,284	0,980	5,85	0,414
1,6	0,303	1,163	7,81	0,431
1,7	0,320	1,365	9,44	0,448
1,8	0,336	1,59	13,4	0,463
1,9	0,349	1,82	17,1	0,478
2,0	0,360	2,06	21,6	0,492

5. - Discussione.

Dalla tab. I si vede che lo sparpagliamento dei fotoni cresce anch'esso col crescere della profondità, come quello degli elettroni. Per la discussione del significato che ha l'indefinito crescere dello sparpagliamento dei fotoni con la profondità rimandiamo all'analoga discussione fatta in II per gli elettroni.

Dalle (25) e (25'), per $n = 0$ si può dedurre la semplice relazione

$$\langle \theta^2 \rangle_W = \frac{C(s+2)}{C(s)} \langle \theta^2 \rangle_E,$$

che lega la deflessione angolare dei fotoni a quella degli elettroni di uguale energia e di uguale età s .

Per comodità, nella 5^a colonna della tab. I abbiamo riportato il rapporto $\eta_0/\delta_0 = C(s+2)/C(s)$ tra le due deflessioni angolari, da cui si vede che questo

rapporto cresce da zero al valore limite 1 al crescere della profondità. Così la deflessione angolare dei fotoni è sempre minore di quella degli elettroni. Questo risultato si spiega facilmente osservando che i fotoni conservano la deflessione angolare degli elettroni di energia maggiore che li hanno generati a quote superiori.

Per lo scostamento laterale quadratico $\langle r^2 \rangle$ e per quello misto angolare-laterale $\langle \theta r \rangle$ occorre un ulteriore chiarimento. Difatti, considerando i rapporti γ_1/δ_1 e γ_2/δ_2 come si deducono dalla tab. I e da quella data in II, si vede che lo scostamento laterale è dapprima più piccolo per i fotoni, mentre poi a profondità maggiori diventa più grande. Ciò si spiega osservando che lo scostamento laterale è una media di scostamenti elementari del tipo $r = \theta(t - t')$, dove $t - t'$ è la distanza tra la quota a cui è avvenuta la deflessione angolare θ è la quota che si considera. Poichè i fotoni hanno un percorso maggiore degli elettroni, il braccio di leva $t - t'$ è per essi in media più grande che per gli elettroni. Alle piccole profondità questo effetto non ha ancora influenza sensibile e quindi prevale l'effetto della minore deflessione angolare dei fotoni; a grandi profondità esso invece diventa preponderante e lo scostamento laterale dei fotoni supera quello degli elettroni. In effetti si osserva che mentre lo scostamento laterale quadratico $\langle r^2 \rangle \sim \theta^2(t - t')^2$ dei fotoni supera quello degli elettroni già prima del massimo (per $s > 0,7$), per lo scostamento misto angolare-laterale $\langle \theta r \rangle \sim \theta^2(t - t')$ occorrono profondità maggiori perchè ciò avvenga e precisamente al di là del massimo ($s > 1, 2$).

Il fatto che lo sparpagliamento *integrale* risulti sempre minore di quello *differenziale* non richiede alcun commento in quanto del tutto prevedibile.

TABELLA II. — Confronto tra i risultati ottenuti da diversi autori per lo sparpagliamento medio (o al massimo). I valori riportati danno il coefficiente numerico del fattore K^2/E^2 oppure K^2/W^2 .

	$\langle \theta^2 \rangle_E$	$\langle \theta r \rangle_E$	$\langle r^2 \rangle_E$	$\langle \theta^2 \rangle_W$	$\langle \theta r \rangle_W$	$\langle r^2 \rangle_W$	$\langle \theta^2 \rangle_E$	$\langle \theta r \rangle_E$	$\langle r^2 \rangle_E$	$\langle \theta^2 \rangle_W$	$\langle \theta r \rangle_W$	$\langle r^2 \rangle_W$
MOLIÈRE ⁽⁶⁾ .	0,6	0,437	0,835	0,2	0,403	1,314	—	—	—	—	—	—
ROBERG e												
NORDHEIM ⁽⁴⁾ .	0,545	—	0,642	0,181	—	1,13	0,182	—	0,214	0,060	—	0,38
JANOSSY ⁽⁹⁾ .	0,570	—	0,724	—	—	—	—	—	—	—	—	—
BORSELLINO .	0,570	0,394	0,725	0,176	0,349	1,128	0,190	0,131	0,242	0,059	0,116	0,376

Per un confronto con i risultati di altri autori sono stati raccolti nella tab. II i valori calcolati per le diverse quantità; i dati degli autori precedenti

si riferiscono soltanto al massimo dello sciame (MOLIÈRE) o ai valori mediati sulla profondità (ROBERG e NORDHEIM, JANOSSY), che per quanto visto dovrebbero coincidere. Nell'ultima riga sono riportati i dati qui calcolati, appunto per il massimo.

Gli scarti sono da attribuirsi alla diversa approssimazione della teoria unidimensionale utilizzata. Sia i valori di JANOSSY che quelli qui calcolati sono da considerarsi più attendibili, essendo stata usata una teoria unidimensionale più elaborata ⁽³⁾.

Si può osservare che la dipendenza dello sparpagliamento dalla profondità, che risulta dai calcoli precedenti, deve indurre a delle riserve nell'uso delle funzioni di distribuzione angolare e laterale calcolate da MOLIÈRE ⁽⁶⁾ per il massimo dello sciame. Tuttavia le ricerche di COCCONI e coll. ⁽¹⁰⁾ hanno mostrato che non v'è apprezzabile scarto tra la distribuzione osservata e quella di MOLIÈRE. Questo risultato può essere giustificato considerando da una parte che lo sparpagliamento al massimo coincide con lo sparpagliamento mediato sulla profondità. In effetti se gli sciami sono generati con continuità a quote diverse, come si deve pensare se la componente molle è secondaria della componente nucleonica attraverso la disintegrazione del neutretto, il dispositivo sperimentale registra in definitiva dei valori medi sulla profondità e quindi la distribuzione osservata non si deve scostare molto dalla distribuzione al massimo (tanto più che gli sciami più facilmente rivelati non devono essere molto lontani dal massimo del loro sviluppo).

D'altra parte l'imprecisione delle misure e le incertezze sulla primaria della molle sono tali che non si può istituire ancora un confronto dettagliato con la teoria.

Ringrazio la dott. M. BETTONI per l'aiuto prestatomi nelle valutazioni numeriche.

APPENDICE

Mostriamo come il metodo qui seguito di Landau sia effettivamente equivalente al metodo di calcolo basato sulle formule di Nordheim. Difatti l'inversione formale delle (20) porta per $I_n(E, t)$ e $J_n(W, t)$ ad espressioni del tipo proposto da NORDHEIM.

Si osservi infatti che è:

$$\frac{n!}{[\lambda - \lambda_1(s)]^{n+1}} = \mathcal{L} \{ t^n \exp [\lambda_1(s)t] \},$$

⁽¹⁰⁾ G. COCCONI V. COCCONI-TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

quindi le (19) si possono scrivere

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{\mathfrak{M}_{J_n}(s, t)\} &= \frac{1}{2} K^2 \mathfrak{L}\{H_1(s) \exp[\lambda_1(s)t] + H_2(s) \exp[\lambda_2(s)t]\} \times \\ &\quad \times \mathfrak{L}\{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_\pi}(s-2, t)\}, \\ \mathfrak{L}\{\mathfrak{M}_{J_n}(s, t)\} &= \frac{1}{2} K^2 \mathfrak{L}\{L_1(s) \exp[\lambda_1(s)t] - L_1(s) \exp[\lambda_2(s)t]\} \times \\ &\quad \times \mathfrak{L}\{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_\pi}(s-2, t)\}.\end{aligned}$$

Per il teorema della Faltung relativo alle trasformate (unilateri) di Laplace si ha quindi:

$$(1a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_{I_n}(s, t) &= \frac{1}{2} K^2 \int_0^t \{ H_1(s) \exp[\lambda_1(s)t'] + \\ &\quad + H_2(s) \exp[\lambda_2(s)t'] \} \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_\pi}(s-2, t-t') t'^n dt', \\ \mathfrak{M}_{J_n}(s, t) &= \frac{1}{2} K^2 \int_0^t L_1(s) \{ \exp[\lambda_1(s)t'] - \\ &\quad - \exp[\lambda_2(s)t'] \} \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_\pi}(s-2, t-t') t'^n dt', \end{aligned} \right.$$

che forniscono le trasformate di Mellin di I_n e J_n sotto forma di un prodotto integrale.

Ponendo ora:

$$H_1(s) \exp[\lambda_1(s)t] + H_2(s) \exp[\lambda_2(s)t] = \int_0^\infty y^s p(y, t) dy = \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_p}(s, t),$$

$$L_1(s) \{ \exp[\lambda_1(s)t] - \exp[\lambda_2(s)t] \} = \int_0^\infty y^s q(y, t) dy = \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_q}(s, t),$$

si vede che le quantità sotto il segno di integrale in (1a) sono il prodotto di due trasformate di Mellin. Si può allora applicare il teorema della Faltung per queste trasformate ⁽¹¹⁾ (considerate come trasformate bilateri di Laplace) e si trova così:

$$(2a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\{ H_1(s) \exp[\lambda_1(s)t] + H_2(s) \exp[\lambda_2(s)t] \} \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_\pi}(s-2, t-t') = \\ &= \int_0^\infty E^s dE \int_0^\infty \pi(E_0, E', t-t') p\left(\frac{E}{E'}, t'\right) \frac{dE'}{E'^3}, \\ &L_1(s) \{ \exp[\lambda_1(s)t] - \exp[\lambda_2(s)t] \} \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}_\pi}(s-2, t-t') = \\ &= \int_0^\infty W^s dW \int_0^\infty \pi(E_0, E', t-t') q\left(\frac{W}{E'}, t'\right) \frac{dE'}{E'^3}. \end{aligned} \right.$$

⁽¹¹⁾ G. DOETSCH: *Laplace-Transformation* (Berlin, 1937).

D'altra parte (vedi citaz. ⁽³⁾ formula (2.35)) si ha:

$$p\left(\frac{E}{E'}, t'\right) = E' \pi(E', E, t'),$$

$$q\left(\frac{W}{E'}, t'\right) = E' \gamma(E', W, t').$$

Sostituendo le (2a) in (1a) e invertendo l'ordine delle integrazioni rispetto a t e rispetto a E si ha:

$$\mathcal{N}_{I_n}(s, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E^s dE \int_0^t t'^n dt' \int_0^\infty \left(\frac{K}{E'}\right)^2 \pi(E_0, E', t-t') \pi(E', E, t') dE',$$

$$\mathcal{N}_{J_n}(s, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty W^s dW \int_0^t t'^n dt' \int_0^\infty \left(\frac{K}{E'}\right)^2 \pi(E_0, E', t-t') \gamma(E', W, t') dE',$$

e quindi immediatamente:

$$I_n(E, t) = \frac{1}{2} \int_0^t t'^n dt' \int_0^\infty \left(\frac{K}{E'}\right)^2 \pi(E_0, E', t-t') \pi(E', E, t') dE',$$

$$J_n(W, t) = \frac{1}{2} \int_0^t t'^n dt' \int_0^\infty \left(\frac{K}{E'}\right)^2 \pi(E_0, E', t-t') \gamma(E', W, t') dE'.$$

Se ora si osserva che la funzione sotto il segno è diversa da zero solo per $E \leq E' \leq E_0$, ricordando le (8) si può scrivere:

$$(3a) \quad \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{E,t} = \frac{1}{\pi(E_0, E, t)} \int_E^{E_0} \left(\frac{K}{E'}\right)^2 dE' \int_0^t \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t-t') (t-t')^n dt',$$

$$(3'a) \quad \langle \theta^{2-n} r^n \rangle_{W,t} = \frac{1}{\gamma(E_0, W, t)} \int_E^{E_0} \left(\frac{K}{E'}\right)^2 dE' \int_0^t \pi(E_0, E', t') \gamma(E', W, t-t') (t-t')^n dt',$$

la (3a) è esattamente la formula data da NORDHEIM. La (3'a) è più semplice di quella utilizzata da NORDHEIM ed è del tutto simile alla (3a); essa mostra chiaramente come lo sparpagliamento dei fotoni alla profondità t sia dovuto esclusivamente agli elettroni che attraversano gli strati dt' a profondità generiche $t' < t$.

SUMMARY

The paper values the angular and lateral spread of the photons in a big shower. The r.m.s. of spread is defined by means of the distributions of electrons and photons, that are solutions of Landau's equations. Using the Mellin-Laplace-Fourier transformation, the problem is reduced to a linear equation of finite difference type and to an ordinary equation if the ionisation is neglected. In this case, the inversion of the transformations yields (for $n = 0, 1, 2$):

$$\langle \theta^{2-n} \rangle_{W,t} = n! H_1(s) \frac{L_1(s+2)}{L_1(s)} \left\{ \frac{1}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^{n+1}} - \frac{1}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^{n+1}} \right\} \frac{K^2}{W^2}$$

that indicate a sensitive dependence on the depth $t = (\log E_0/W - 1/2s)/(-\lambda'_1(s))$. One may calculate the spread averaged on the depth, that is equal to the spread at the shower's maximum ($s = 1$). Also the average spread of particles (electrons or photons) with energy greater than E is calculated and we have $\langle \Theta^{2-n} R^n \rangle = 1/3 \langle \theta^{2-n} \rangle$, that is the same relation that we have at the maximum. With a distributed source of the soft component (neutretto), the coincidence of the averaged spread on the depth with the spread at the maximum may explain the accordance of the experimental results of COCCONI and *cow.* with Molière's distribution (evaluated at the maximum).

NOTE TECNICHE

Spettrografo di impulsi a 99 canali.

E. GATTI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 30 Maggio 1950)

Riassunto. — Si descrive un analizzatore a 99 canali per la registrazione di spettri d'ampiezza di impulsi di tensione. Lo schema funzionale dello spettrografo è una modificazione di quello ideato da WILKINSON ⁽¹⁾. La massima parte delle varianti apportate è diretta a conseguire una maggiore velocità di conteggio ed un più vasto campo di impiego,

1. - Introduzione.

Per lo studio delle reazioni nucleari ha grande interesse la conoscenza delle energie delle particelle emesse: l'informazione su tali energie è ottenibile per lo più (escluso il metodo dei range in camera di Wilson o sulle lastre) dallo studio di impulsi di tensione di ampiezza proporzionale all'energia della particella o più generalmente funzione di essa (camere di ionizzazione, contatori proporzionali, ecc.). Sorge pertanto la necessità di classificare gli impulsi secondo la loro ampiezza A : di studiarne cioè lo spettro $n = \varphi(A)$. Il metodo che primo e più naturale si presenta è quello di contare il numero di impulsi (ci riferiamo sempre a una unità di tempo fissa ed arbitraria) che superano l'ampiezza A , ripetendo varie misure con diversi valori del taglio A mediante l'uso di un « discriminatore ». Otterremo una funzione $n = f(A)$ certamente non crescente, la cui derivata cambiata di segno $\varphi(A) = -f'(A)$ fornisce la distribuzione cercata.

Quando però si esamini la natura statistica delle misure da effettuare e si abbiano presenti le caratteristiche delle apparecchiature sperimentali, si deve concludere che una misura di tal genere non può condurre ad elevate precisioni.

Consideriamo allo scopo due *successive* (non contemporanee) misure a tagli A_1 ed A_2 (che supporremo vicini) fatte con uno stesso discriminatore e

⁽¹⁾ D. WILKINSON: *Proc. of Cambridge Philosophical Soc.* (Luglio 1950).

siano i rispettivi risultati n_1 ed n_2 . Le vere grandezze saranno

$$G_1 = n_1 + \alpha_1 \sqrt{n_1}, \quad G_2 = n_2 + \alpha_2 \sqrt{n_2},$$

dove, come è noto, α_1 ed α_2 sono, con il 99 % di probabilità, compresi nell'intervallo -3 e $+3$, per cui la grandezza che interessa $G = G_1 - G_2 = n_1 - n_2 \pm \alpha \sqrt{n_1 + n_2}$ è affetta dall'errore quadratico medio percentuale $\sqrt{n_1 + n_2}/(n_1 - n_2)$ il quale diviene spesso intollerabile. Ad es., sia $n_2 = 0,9 n_1$ l'errore vale circa $14/\sqrt{n_1}$ e per ridurre tale errore al 5 % il numero n_1 deve valere 75 000, il che può portare a un tempo di conteggio non indifferente.

Supponiamo ora invece che le due misure siano state fatte simultaneamente con due discriminatori: i risultati saranno ancora n_1 ed n_2 , ma le due misure non sono indipendenti. Gli impulsi contati dal discriminatore a taglio A_1 sono tutti quelli contati dal discriminatore a taglio A_2 più altri: pertanto le vere grandezze G_1 e G_2 possono scriversi così:

$$G_1 = n_2 + \alpha_2 \sqrt{n_2} + (n_1 - n_2) + \alpha_1 \sqrt{n_1 - n_2},$$

$$G_2 = n_2 \pm \alpha_2 \sqrt{n_2} \quad (\text{identico } \alpha_2!)$$

e pertanto

$$G = n_1 - n_2 + \alpha_1 \sqrt{n_1 - n_2};$$

l'errore medio quadratico percentuale risulta $\sqrt{n_1 - n_2}/(n_1 - n_2)$. Riapplicando l'esempio numerico di cui sopra troviamo che, per raggiungere la precisione voluta, il numero di impulsi n_1 da conteggiare vale 4 000 con un risparmio di tempo di 37 volte, se si tien conto che col primo metodo le due misure sono fatte successivamente.

Il vantaggio del secondo metodo, non solo come fattore tempo, ma per conseguire una desiderata precisione, risulta chiaro quando si pensi alle variazioni che possono verificarsi nei complessi di rivelazione ed amplificazione al trascorrere di lunghi intervalli di tempo; variazioni che non figurano nella analisi precedentemente fatta ma del cui peso è facile rendersi conto intuitivamente.

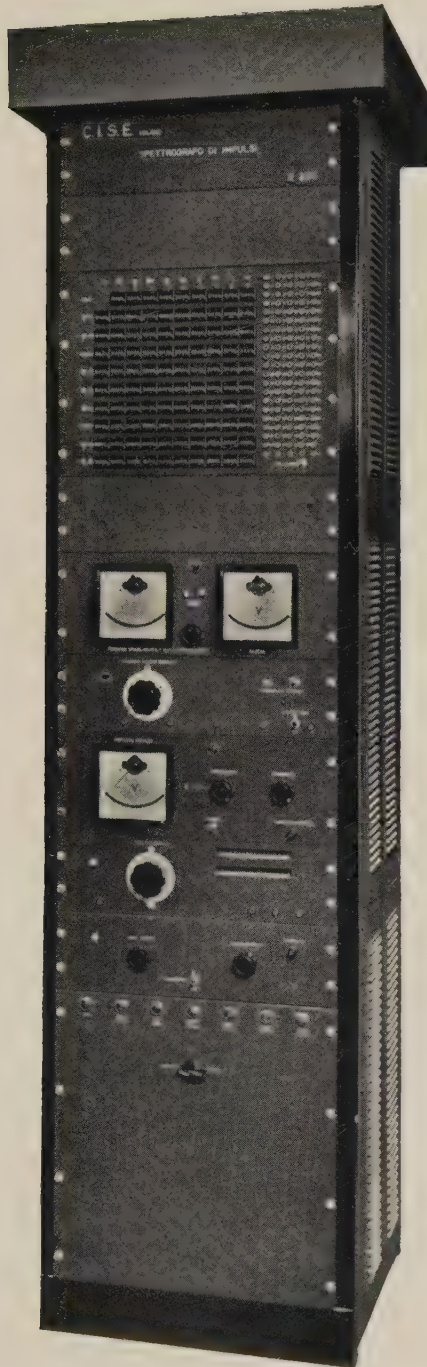
L'estensione del metodo è ovvia ⁽²⁾ ⁽³⁾: si predispongono n discriminatori a tagli successivamente crescenti A_1, A_2, \dots, A_n a seconda della finezza di analisi desiderata. Non è però semplice in pratica disporre di n circuiti la cui stabilità sia tale da giustificare la divisione in n canali quando n superi ad esempio il numero 30. Ammessa infatti l'ampiezza massima degli impulsi di 150 V, la divisione in 30 canali dell'ampiezza di 5 V ciascuno importa una costanza del valore di taglio entro 0,1 V (tollerando errori del 4 % sulla larghezza dei canali) che è ai limiti delle possibilità dei circuiti discriminatori (ad esempio tipo Shmitt ⁽⁴⁾).

Dal punto di vista della stabilità il discriminatore basato sul sistema proposto da WILKINSON ⁽¹⁾, che è quello che abbiamo adottato, è nettamente superiore, e dal punto di vista economico è conveniente (a giudicare da una

⁽²⁾ E. BALDINGUER e R. CASALE: *Helv. Phys. Acta*, **21**, 172 (1949).

⁽³⁾ C. H. WESTCOTT e G. C. HANNA: *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 181 (1949).

⁽⁴⁾ W. ELMORE e M. SANDS: *Electronics Experimental Techniques* (McGraw Hill, 1949), p. 99.



SCALA DECINE

NUMERATORI

SCALA UNITÀ

ALIMENTAZIONI STABILIZZATE

SERVIZI AUSILIARI

GENERATORI IMPULSI CAMPIONE

CONVERSIONE AMPIEZZA - TEMPO - NU-
MERO

AMPLIFICATORE BLOCCO TAGLIO

ALIMENTAZIONE GENERALE

Fig. 1.



stima molto grossolana) a partire da 25 canali. Tale metodo può paragonarsi, per le precisioni e stabilità raggiungibili, con il metodo di deflessione elettrostatico di un pennello di raggi catodici ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾.

Fondamentalmente il metodo di Wilkinson consiste nell'associare all'« ampiezza » di ogni impulso proveniente, ad esempio, da una camera di ionizzazione, la « durata » di un conseguente impulso rettangolare corrispondentemente generato nell'apparecchiatura. La « durata » viene misurata mediante un oscillatore in « numero » di cicli. Il « numero » n ottenuto è inviato a scale elettroniche decimali che (a mezzo di relais) provvedono a fare scattare l'ennesimo numeratore che registra pertanto l'arrivo di un impulso di ampiezza proporzionale ad n .

Il vantaggio del metodo può rilevarsi dai seguenti punti:

1) Esistono circuiti elettronici che possono, con grande precisione e stabilità, collegare una d.d.p. con un intervallo di tempo attraverso una costante di proporzionalità K .

2) La larghezza dei canali è legata alla costanza di K ; una eventuale variazione percentuale di K si ripercuote sulla larghezza di tutti i canali con la stessa percentuale. Nei discriminatori a scatto formati da n elementi distinti, la variazione della tensione di taglio A di uno di essi altera in modo molto pronunciato la larghezza dei canali adiacenti.

3) Ogni canale richiede la presenza di pochissimi componenti; si richiede invece un complesso abbastanza grande di componenti al servizio di tutti i canali. Ne deriva la convenienza del metodo quando i canali superino un certo numero. (Il nostro analizzatore è a 99 canali).

4) Sono accettati impulsi compresi in un vasto campo di forma e durata; le limitazioni precise sono date in seguito.

Unico punto a sfavore, che in qualche caso può far preferire un analizzatore di tipo convenzionale, è la « lentezza », ovvero la mancanza di potere risolutivo: in totale il processo di classificazione di un impulso richiede un tempo τ durante il quale l'apparecchio rimane bloccato e conseguentemente il numero massimo di impulsi registrati è $1/\tau$ (65 al secondo per l'apparecchio da noi realizzato).

Importante è notare che nessun errore proviene dalla mancata accettazione degli impulsi che pervengono all'apparecchiatura durante il tempo di insensibilità, ammesso che gli eventi da osservare siano statistici, e temporalmente indipendenti.

2. - Descrizione generale.

La fig. 1 mostra l'aspetto dello spettrografo nel suo insieme.

Riferiamoci allo schema di principio (fig. 2).

L'impulso viene amplificato, indi passa attraverso il circuito di blocco che trovasi normalmente in posizione di « aperto »: entra poi nel circuito di « taglio » donde esce, se supera un determinato valore prefissato a piacere. Indi si divide per azionare due catene di circuiti che procedono in parallelo:

⁽⁵⁾ W. E. GLENN jr.: *Nucleonics*, **4**, 50-61 (1949).

⁽⁶⁾ D. A. WATKINS: *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 495 (1949).

una provvede alla conversione ampiezza-intervallo di tempo, intervallo di tempo-numero di cicli (codificazione), l'altra (servizi ausiliari) determina la seguente catena di eventi:

1) con ritardo variabile da 5 a 60 μ s vien messo in funzione il circuito di blocco che impedisce a un eventuale impulso successivo di interferire col processo di codificazione e registrazione dell'impulso accettato;

2) vengono introdotti 4 ms di ritardo prima di comandare gli eventi 3°, 4°, 5°; in questi 4 ms avviene la conversione ampiezza-tempo, tempo-numero, numero-posizione delle scale decimali di conteggio (rappresentate nello schema mediante 2 anelli, rispettivamente scale unità e decine: ad ogni giro completo delle scale unità un impulso è inviato alla scala «decine»);

3) un forte impulso della durata di circa 10 ms è inviato ad azionare (registrazione) uno dei 99 numeratori e precisamente quello che ha in serie i 2 relais (thyratrons) che risultano aperti in conseguenza della posizione assunta dalle scale unità e decine;

4) un impulso della durata di 1 ms è inviato alle scale in modo da riportarle alla posizione 0 di riposo;

5) viene riaperto il circuito di blocco in modo da consentire all'analizzatore di accettare un nuovo impulso.

3. - Conversione ampiezza tempo (fig. 4).

Dovendo procedere alla descrizione dettagliata dell'apparecchio, è bene iniziare dal complesso «conversione ampiezza-tempo-numero di cicli» che ne costituisce l'organo più delicato ed importante, e per il cui buon funzionamento è previsto il maggior numero dei circuiti ausiliari. (Nella descrizione e nelle tavole i tubi elettronici sono individuati da numeri: le due sezioni di quelli doppi sono ulteriormente distinte nel testo mediante gli indici *a* e *b* rispettivamente per la sezione disegnata a sinistra e a destra nelle tavole).

Lo stadio di ingresso è costituito da un amplificatore catodico a 2 tubi (tubi (1), (2), (3a)), il quale è destinato a caricare la capacità *C*, in serie ai diodi (4), (5), alla tensione di cresta dell'impulso entrante. L'ampiezza massima prevista per il segnale entrante (positivo) è di 150 V, la capacità massima da caricare attraverso una resistenza (costituita dai due diodi) di 200 Ω è di 250 pF. Il più breve tempo di salita è fissato a 0,5 μ s e il più lungo a 60 μ s (valori che pare possano coprire tutte le possibili varietà di impulsi di camere e contatori proporzionali, ecc.). L'amplificatore catodico a 2 tubi progettato consente di avere amplificazione costante e prossima ad 1, pur impiegando un tubo con possibilità di erogazione di forti correnti, quali occorrono per caricare una capacità relativamente grande.

Una analisi di tale circuito fornisce i seguenti valori: $R_{int} = 50 \Omega$; corrente max di picco fornibile dall'amplificatore catodico $I = 75$ mA.

I circuiti collegati al tubo (6) costituiscono propriamente il dispositivo di conversione «ampiezza-tempo». Tale tubo è montato secondo lo schema «Miller timé base» (7) (1).

(7) B. CHANGE e coll.: *Electronic Time Measurements* (Radiation Lab. Series, MIT, 1949), p. 114.

tarsi a quell'univocamente determinato potenziale compatibile con la d.d.p. ($V + V_0$) che il condensatore mantiene tra placca e griglia.

Tale situazione del condensatore è rappresentata in fig. 5 dal segmento NP .

Il condensatore, carico alla tensione ($V + V_0$), comincia ora a scaricarsi attraverso alla resistenza R da 40 M Ω e pertanto dopo un tempo dt la differenza di potenziale delle sue armature sarà $V - dQ/C = V - (300 - V_0) dt/CR$. Data la forte transconduttanza del tubo usato, V_0 rimane sempre nell'intervallo $-2 \sim 0$ V; la corrente di scarica del condensatore $i = (300 - V_0)/R$ si mantiene perciò costante entro l'1 % e conseguentemente $V + V_0$ decresce linearmente col tempo con pendenza

$$(1) \quad -\frac{dV}{dt} = \frac{300}{RC} \text{ volt/s.}$$

Osservando la fig. 5 si vede che pure V_0 decresce linearmente.

Quando si arresterà il processo? Quando la placca del tubo (6), scendendo di potenziale avrà raggiunto il valore per cui il diodo (4) si aggancia (50V). Allora il condensatore continuerà a scaricarsi con la medesima legge, ma l'armatura di placca sarà ora mantenuta a potenziale costante e quindi in un tempo brevissimo (qualche microsecondo) la griglia raggiungerà il potenziale 0; ciò determina la fine del processo ed il riagganciamento del diodo (5).

Si è certamente notato che per tutto il periodo del processo la griglia controllo del tubo (6) è a potenziale negativo, mentre normalmente è a 0; pertanto per tutto l'intervallo di tempo T_d in cui il potenziale dell'anodo scende linearmente, la griglia schermo porterà meno corrente: una piccola resistenza (5 K Ω) in serie con detta griglia, permette di raccogliere un impulso positivo la cui durata T_d risulta, per quanto esposto, proporzionale a V .

Il riagganciamento del diodo (4) deve avvenire alla tensione di riposo (50 V); l'eventuale presenza di una lunga coda dell'impulso può far sì che la placca del diodo (4) si trovi a un potenziale superiore causando un riagganciamento anticipato con conseguente diminuzione di T_d . Tale eventualità è evitata dal circuito di blocco che, dopo un tempo prefissato a piacere tra 5 e 60 μ s, taglia l'impulso riportandolo rapidamente a 0. (Il circuito di blocco serve eventualmente a determinare anche la « partenza » del circuito « Miller », quando l'impulso non abbia un tempo di discesa sufficientemente rapido per determinare la partenza « automatica »).

La stabilità della costante di proporzionalità K tra V e T_d dipende dalla tensione di alimentazione (300 V nel nostro caso) e dalla costante di tempo RC (formula (1) di questo n.).

Si è fissato il tempo $T_d = 2,5$ ms in corrispondenza a un impulso che venga registrato nel 99° canale, basandosi sulle seguenti considerazioni:

1) il tempo di codificazione dell'impulso deve essere ragionevolmente breve: è inutile però scendere a valori estremi, dato che la durata dell'impulso di azionamento dei numeratori (processo di registrazione) è dipendente dalla struttura meccanica dei numeratori stessi: esso risulta pertanto un dato di

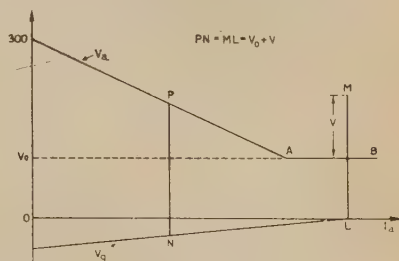


Fig. 5. - Per motivi di evidenza il grafico non è in scala: V_0 dovrebbe in realtà quasi confondersi con l'asse delle ascisse.

progetto e non può, nel caso dei numeratori usati, essere inferiore a 10 ms; il valore adottato per T_a è parso sufficientemente piccolo nei confronti dei 10 ms a cui va sommato, quando si prende in considerazione il tempo totale impiegato dall'analizzatore per la classificazione (codificazione-registrazione) di un impulso;

2) il funzionamento del circuito « Miller » è bene sia « automatico » ed abbia inizio non appena l'impulso abbia sorpassato il valore di cresta; perchè ciò avvenga, la pendenza della funzione $V_a(t)$, decrescente linearmente col tempo, deve essere minore della pendenza di discesa dell'impulso: questo porta ad una limitazione inferiore al tempo di codificazione. Col tempo scelto di 2,5 ms (in corrispondenza all'impulso di ampiezza massima), il funzionamento risulta « automatico » per impulsi di qualsiasi ampiezza aventi costante di tempo di discesa inferiore a 50 μ s.

Una volta fissato T_a , risulta determinato il prodotto RC degli elementi del circuito « Miller ». Si è previsto di poter ripartire sui 99 canali non solo spettri aventi impulsi di ampiezza fino a 150 V, ma anche spettri con impulsi massimi di 75 V: ottenendo così di poter introdurre (vedi n. 4) una tensione di taglio pari alla metà dell'altezza degli impulsi, pur continuando a sfruttare la ripartizione dello spettro su 99 canali; si ottiene così anche la possibilità di raddoppiare il potere separatore e la possibilità di eliminare, mediante il taglio ad altezza opportuna, il fondo o impulsi minori di cui non interessa determinare lo spettro. La detta variazione di potere separatore è ottenuta variando la costante di tempo RC entro i valori 5, 10 ms.

Per la scelta dei valori che C può assumere si è tenuto conto delle seguenti limitazioni: un valore troppo piccolo è sconsigliabile nel senso che non possono più ritenersi trascurabili le capacità parassite (generalmente poco stabili) associate al circuito di cui il condensatore C fa parte; un valore elevato porta a un dimensionamento eccessivo del circuito di carica (tubi (1), (2), (3)). Nel nostro caso, C è costituito da un condensatore ceramico fisso in parallelo ad uno variabile ad aria: la capacità complessiva può variare entro i valori: 125-250 pF.

Dalle considerazioni fatte, R risulta univocamente determinata e il suo valore (40 M Ω) è tale da poter essere realizzato senza difficoltà con la dovuta stabilità di qualche unità su mille. Il resistore R è costituito da 18 resistori di tipo chimico, disposti in guisa da conservare anche durante il funzionamento dell'apparecchio, la temperatura ambiente.

Riprendiamo in considerazione l'impulso negativo di durata T_a presente sulla griglia schermo del tubo (6), impulso di forma piuttosto irregolare: esso è amplificato dal doppio tubo (7), e passa al circuito « Schmitt »⁽⁴⁾ (tubo 8) che lo trasforma in un impulso rettangolare di durata T_a .

Il tubo (9) amplifica detto impulso rettangolare che costituisce il segnale negativo di comando per il tubo (10). (Il tubo (3b) è un « d.c. restorer » destinato a mantenere costante la polarizzazione del tubo (10) indipendentemente dalla frequenza casuale di arrivo degli impulsi).

Il tubo (10) si trova in parallelo al circuito oscillatorio dell'oscillatore (tubo (11)) e, presentando a riposo una resistenza assai bassa, ne impedisce il funzionamento; esso è percorso altresì da una corrente continua che percorre pure l'induttanza: nel circuito oscillatorio risulta di conseguenza immagazzinata dell'energia. Quando il tubo (10) viene interdetto, il circuito oscillatorio non risulta più smorzato, e pertanto hanno inizio le oscillazioni: la

resistenza catodica del tubo (11) è regolata in modo da mantenere le oscillazioni di ampiezza costante⁽⁸⁾; trascorso il tempo T_a , la bassa resistenza anodica del tubo (10), reso nuovamente conduttore, blocca istantaneamente le oscillazioni.

Il numero di oscillazioni corrispondenti al tempo T_a di 2,5 ms deve essere di 99, dovendo l'impulso corrispondente essere registrato nel 99esimo canale: è così immediatamente determinata a 40 kHz la frequenza dell'oscillatore. Si è usato un elevato rapporto C/L nel dimensionamento del circuito oscillatorio, per conseguire una buona stabilità di frequenza: tale stabilità si ripercuote direttamente sulla stabilità dell'intera apparecchiatura.

L'ultimo tubo (12) amplifica le oscillazioni per presentarle alle scale di conteggio.

4. - Complesso amplificazione blocco e taglio (fig. 3).

Il complesso amplificazione blocco e taglio è destinato a fornire in modo opportuno gli impulsi da misurare al pannello precedentemente descritto.

Alla griglia del tubo (1), che è l'ingresso dell'intera apparecchiatura, devono essere presentati impulsi di ampiezza non superiore a 50 V, di segno positivo o negativo con tempo di salita compreso tra 0,5 e 60 μ s. Il tubo (1) (amplificatore catodico) ha lo scopo di provvedere una elevata impedenza di ingresso.

Il tubo (2) (invertitore controreazionato) è inserito solo nel caso di impulsi di ingresso negativi (commutatore + o -). Il tubo (3) (amplificatore controreazionato) amplifica gli impulsi resi ormai in ogni caso positivi, di un fattore 3: il pannello conversione, ecc., è stato infatti previsto per impulsi di ampiezza massima di 150 V: un valore così elevato è stato scelto per minimizzare l'influenza della curvatura della caratteristica dei diodi che fan parte del circuito di taglio (vedi avanti in questo n.) e del circuito « Miller » (n. 3):

I tubi (4), (5), (6) costituiscono nel loro insieme il circuito di blocco che viene comandato dal tubo (13), il quale riceve a sua volta dal pannello servizi ausiliari (morsetto B) un impulso rettangolare negativo di durata pari al tempo di blocco τ (n. 5).

I tubi (4a), (5a) e (6) costituiscono essenzialmente un amplificatore catodico: il tubo (5b), normalmente interdetto, non interferisce nel funzionamento dell'amplificatore catodico fino all'istante in cui alla griglia, normalmente a 22 V, non proviene l'impulso (positivo rettangolare) di blocco, che, a mezzo del diodo (4b), porta la griglia stessa ad agganciarsi al potenziale di 190 V (potenziale di riposo della griglia del tubo (5a)): il catodo comune di (5a) e (5b) segue tale griglia tornando così in circa 2 μ s al potenziale di riposo, e a tale potenziale viene mantenuto per il tempo τ , anche se alla griglia di (5a) è ancora presente l'impulso o pervengono ulteriori impulsi. Un interruttore permette di mantenere permanentemente il circuito in posizione di blocco, quando lo si desidera (comando sì - no). Si noti che in base al funzionamento descritto, il circuito di blocco determina il rapido ritorno a 0 dell'impulso di cui si è fatto cenno al n. 3.

I successivi diodi (7) e (8) costituiscono il circuito di taglio: il tubo (8)

⁽⁸⁾ W. ELMORE e M. SANDS: loco cit., p. 68.

(« d.c. restorer ») dà alla placca del tubo (7) una polarizzazione rispetto al relativo catodo direttamente connesso all'uscita del circuito di blocco (placca del tubo (6)). Tale polarizzazione, variabile mediante il comando « regolazione taglio », introduce il valore di taglio desiderato: il valore introdotto si legge su un voltmetro riportato a pannello (morsetti « str. » fig. 3-10). I tubi (9), (10) e (11) fanno parte semplicemente di un amplificatore catodico che alimenta il tubo (12) (invertitore controeazionato); il quale infine serve a presentare, come necessario, al pannello « conversione ampiezza-tempo-numero » un impulso positivo (morsetto *EM*).

Il tubo (14) amplifica fortemente ogni impulso che superi la soglia di taglio, e fornisce (morsetto *C*) il segnale di ingresso al pannello servizi ausiliari.

5. - Pannello servizi ausiliari. (Fig. 6) (con riferimento a fig. 2: complessi 5-60 μ s, 4 ms, 10 ms, 1 ms, comando blocco).

Il segnale (positivo) entrante (morsetto *C*) è trasformato, dal circuito dei tubi (1) e (2), in un impulso rettangolare con fianchi a fronte ripido. Viene poi amplificato dal tubo (3a), differenziato dal circuito *RC* compreso fra i tubi (3a) e (4), presentato quindi a quest'ultimo tubo, sotto forma di due impulsi dei quali solo il primo (negativo) viene utilizzato. Queste operazioni sono state eseguite per ottenere da ogni impulso che abbia superata la soglia di taglio, un impulso rapido e di ampiezza costante, atto a comandare le apparecchiature che ora illustriamo.

Il circuito comprendente i tubi (4), (5) e (6) è propriamente quello che introduce (fig. 2) il ritardo variabile a piacere da 5 e 60 μ s prima di iniziare i successivi eventi. Esso agisce producendo un impulso rettangolare di durata variabile entro i detti limiti: detto impulso viene differenziato e dei due picchi ottenuti si utilizza quello positivo corrispondente alla fine del rettangolo. Il circuito è formato da un condensatore e da una resistenza la cui costante di tempo *RC* è variabile (160 pF e potenziometro « ritardo azione blocco »): il condensatore *C* è caricato attraverso il diodo (4) al valore di cresta dell'impulso proveniente dal tubo (3a) e successivamente si scarica secondo la costante di tempo *RC*. Il potenziale ai capi di *C* comanda un circuito discriminatore tipo « Shmitt » (tubi (5) e (6)), che passando dall'una all'altra delle due posizioni ad esso possibili, una volta nella fase di rapida carica del condensatore *C*, una volta durante la fase di scarica esponenziale, fornisce un impulso rettangolare di corrente (circuito anodico del tubo (6)), di durata proporzionale ad *RC*. Tale impulso è differenziato sulla placca stessa del tubo (6) da un'induttanza (20 mH), e trasformato in due picchi di tensione di cui, come si è detto, solo il secondo (positivo) viene utilizzato. Esso aziona, attraverso l'amplificatore catodico (tubo (3b)), il complesso « comando blocco » (tubi (15), (16) e (12a)) e contemporaneamente i tubi (7) e (8): questi, montati secondo un circuito di tipo identico a quello ora descritto, introducono un ulteriore ritardo di 4 ms. Tale ritardo all'entrata in funzione dei tubi (10), (11), (17a), (18), destinati ad azionare mediante un impulso della durata di 10 ms i numeratori meccanici, serve a concedere il tempo necessario alla codificazione dell'impulso in misura e alla contemporanea predisposizione dei relais (thyratrons, vedi fig. 2). A rigore 2,5 ms (tempo di codificazione, vedi n. 3) sarebbero sufficienti: 1,5 ms costituiscono un largo margine.

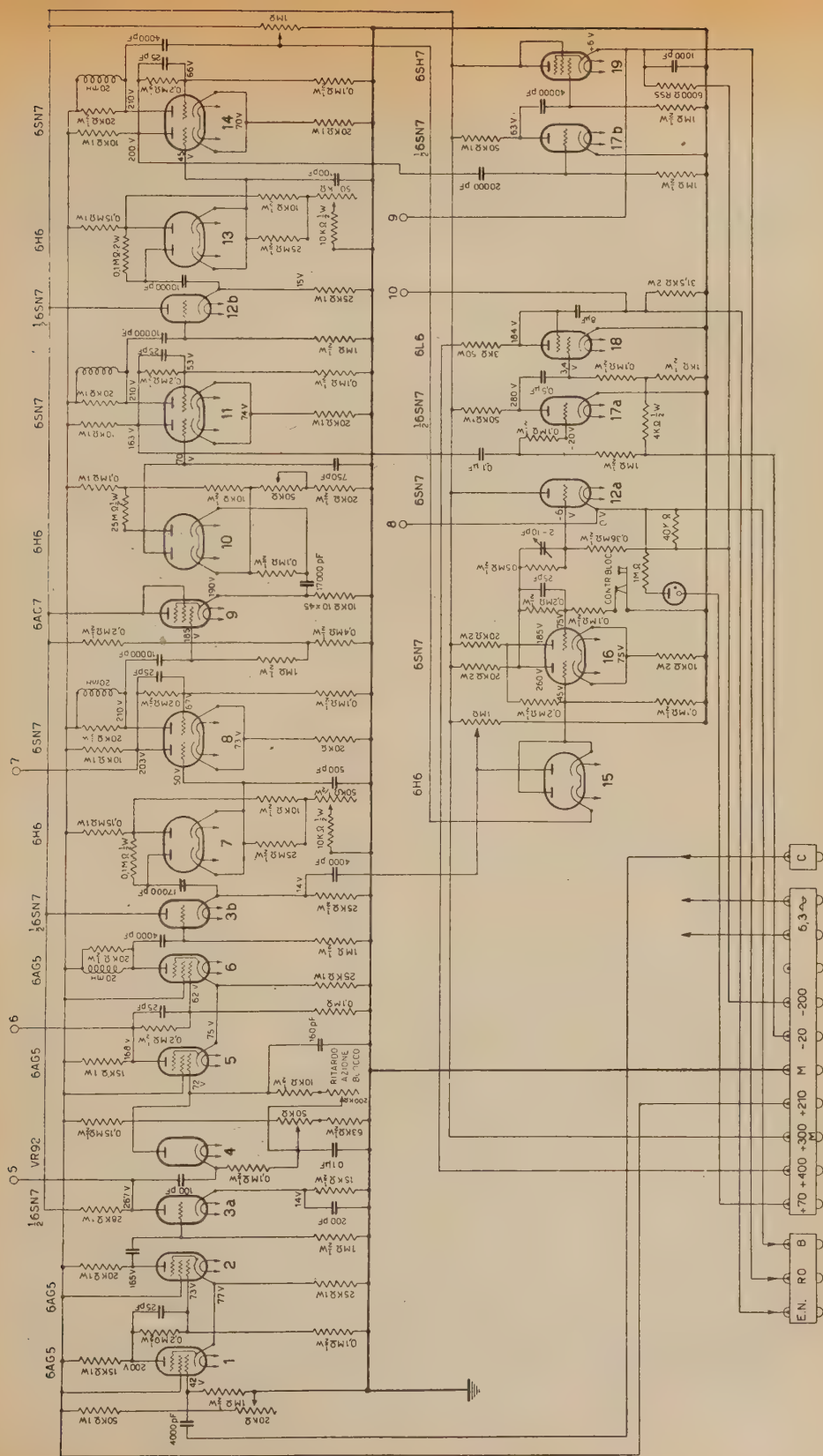


Fig. 6. - Pannello servizi ausiliari.

6. - Pannello scale unità e decine, e complesso numeratori (figg. 7, 8, 9).

Le scale decimali di conteggio (tubi (0), (1),... (9)) sono di SHARPLESS ⁽⁹⁾ (1); esse sono precedute dal formatore di impulsi (tubi (20a), (21), (22)) descritto dallo stesso SHARPLESS.

Riferiamo per ora il discorso all'anello scale unità. A riposo le sezioni «a» dei tubi (1), (2),... (9) sono conduttrici, le sezioni «b» interdette; situazione opposta «anomala» presenta il tubo (0). Ad ogni impulso proveniente dal formatore di impulsi e applicato a tutti i catodi delle sezioni «a», la situazione anomala del tubo (0) si sposta successivamente ai tubi (1), (2), ecc., e poichè il tubo (9) è riaccoppiato al tubo (0), la situazione si sposta ciclicamente: 21 impulsi, ad es., determineranno la situazione anomala del tubo (1).

Il passaggio da situazione normale ad anomala del tubo (0), passaggio che corrisponde ad un «giro» completo dell'anello, determina l'invio di un impulso alle scale decine (amplificatore catodico (20b) e morsetto *ED*) le quali sono identiche alle scale unità: sono però formate da 11 elementi anzichè da 10, e non sono chiuse ad anello. La situazione anomala non progredisce ulteriormente quando sia pervenuta al tubo (9') di fig. 9; essa determina l'accensione del thyatron (1) di fig. 8, rivelata dalla neon spia contrassegnata col simbolo ≥ 100 ; solo la pressione di un pulsante spegne tale spia.

La rimessa a 0 di entrambe le scale unità e decine avviene mediante l'impulso da 1 ms entrante dal morsetto *RO*: tale impulso sbilancia tutti gli elementi di scala in modo da riportarli tutti in posizione normale eccettuato l'elemento 0, che viene portato in posizione anomala. Per il corretto funzionamento delle scale, è necessario che la resistenza verso massa del morsetto contrassegnato *RO* sia bassa (si è trovato sperimentalmente che il funzionamento è regolare per valori compresi tra 0 e 500 Ω): l'amplificatore catodico ivi connesso, (tubo (19) di fig. 6) ha resistenza di uscita di 200 Ω .

Ad ogni elemento di scala (sia unità che decine) è associato un relais (tubi (10), (11),... (19)), precisamente un thyatron; la griglia del thyatron associata all'elemento di scala in posizione anomala è positiva rispetto al proprio catodo, mentre tutte le altre sono negative.

Per analizzare ora in particolare l'azionamento dei numeratori da parte dell'impulso di 10 ms, di cui si è parlato al n. 5, facciamo riferimento al particolare della fig. 8. In esso sono rappresentati un elemento rispettivamente della scala unità e della scala decine unitamente ai thyatron associati: supponiamo che gli elementi rappresentati siano proprio quelli in posizione anomala. L'impulso, di 10 ms e di 400 V di ampiezza entrante dal morsetto *EN*, determina la contemporanea accensione dei due thyatrons (quello associato alla scala decine è acceso mediante il condensatore da 400 pF) e il conseguente azionamento del numeratore che trovasi in serie ai due thyatrons ed al diodo (2).

La necessità del diodo (2) è compresa più facilmente facendo riferimento

(9) T. K. SHARPLESS: *Electronics*, 21, 3-122 (1948).

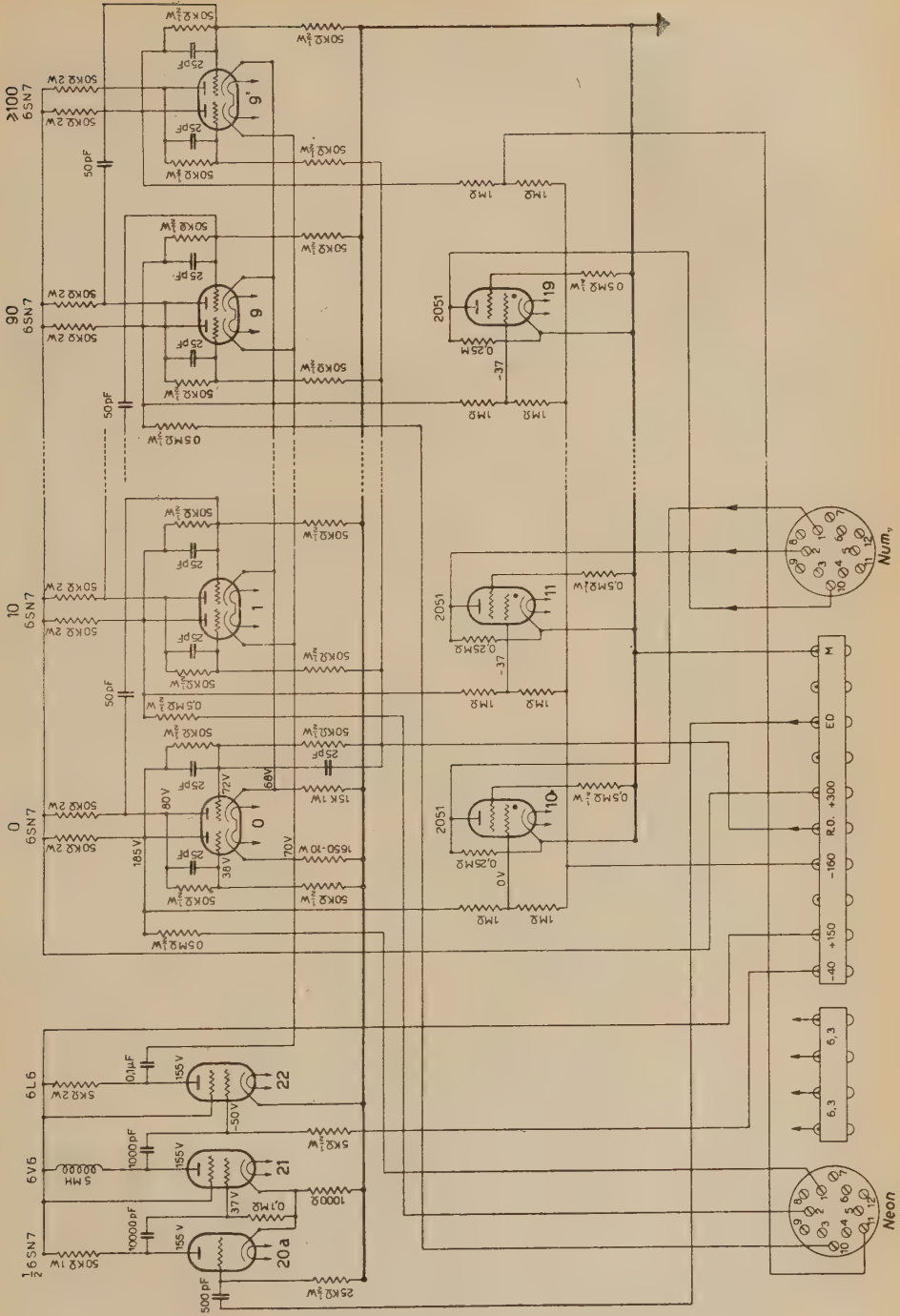


Fig. 9. - Anello scale diecine.

a fig. 2. Si può osservare che non è unico il circuito che unisce due prefissati dei 20 thyratrons, a meno che sia univocamente determinato il senso di percorrenza della corrente nei numeratori; a ciò appunto provvede un diodo associato ad ogni numeratore.

Si noterà che ogni numeratore è stato provvisto di un circuito secondario,

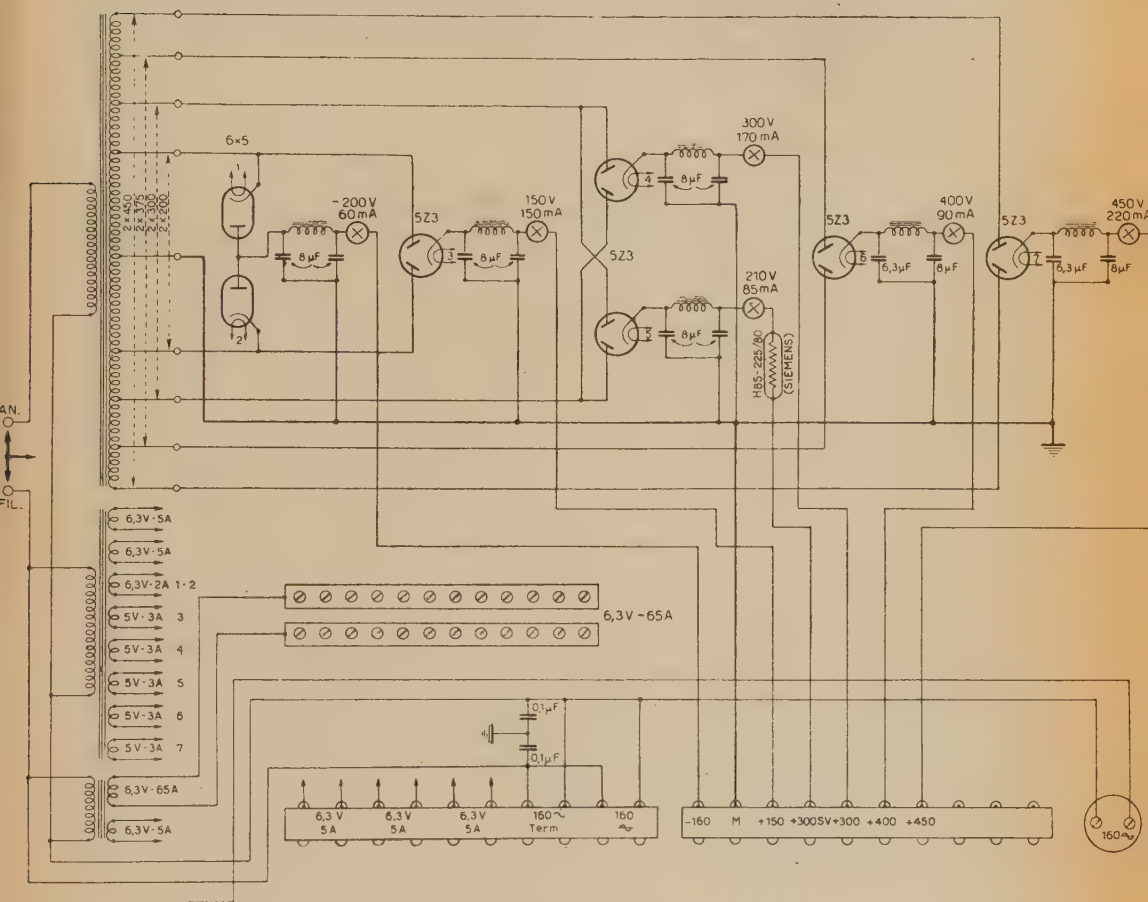


Fig. 11. — Pannello alimentazioni.

dal quale è possibile raccogliere un impulso quando il numeratore viene azionato. L'uscita di questi 99 secondari è portata a 99 bocche a pannello; si è fatto ciò per poter eventualmente connettere scale elettroniche di demoltiplicazione ai canali più sfruttati durante il corso di una misura, o per poter eventualmente disporre di impulsi di comando legati all'arrivo di impulsi di determinata ampiezza.

ampiezza costante di 39 V per la durata di 4 ore: essi sono stati registrati tutti nel 96esimo canale.

Gli scostamenti dalla linearità sono compresi entro l'1 %.

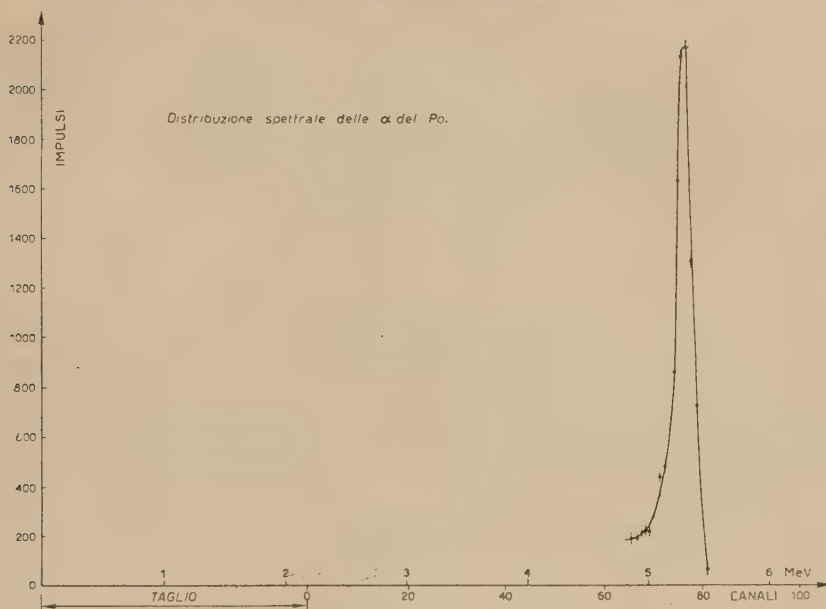


Fig. 13. - Distribuzione spettrale delle α del Po.

A titolo di esempio si riporta (fig. 13) uno spettro ottenuto mediante l'analizzatore (α del Po).

Ringrazio vivamente il dott. WILKINSON per avermi fornito copia del suo manoscritto prima della pubblicazione; il prof. BOLLA per i suoi consigli nella stesura di questo lavoro; il sig. COTTINI che ha curato l'esecuzione dell'apparecchiatura ed ha efficacemente contribuito alla messa a punto; e infine il laureando sig. MINARDI per lo spettro di fig. 13.

SUMMARY

A 99 channels analyser of the Wilkinson type is described. Electronic relays are systematically used instead of the mechanical ones. These and other modifications were introduced to improve counting velocity and flexibility of use.

Un generatore di impulsi portatile per l'analisi di circuiti di coincidenze.

M. CONVERSI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 9 Giugno 1950)

Riassunto. — Si descrive un generatore di impulsi portatile per l'analisi di circuiti di coincidenze.

Per l'analisi del funzionamento e per la messa a punto di apparecchi per la registrazione di coincidenze (in particolare di coincidenze ritardate involventi ritardi dell'ordine del μs) è in generale necessario servirsi di un generatore di impulsi capace di fornire da due uscite indipendenti due impulsi sincronizzati susseguentisi entro un breve intervallo di tempo, t , il cui valore possa essere variato con continuità. L'analisi dell'apparecchio registratore può allora facilmente effettuarsi mediante un sincroscopio, osservando nei suoi diversi punti le caratteristiche e la durata degli impulsi al variare di t .

I pochi circuiti di questo tipo che sono stati finora descritti ⁽¹⁾, presentano in generale l'inconveniente di essere relativamente complessi dal punto di vista elettrico e di non essere facilmente realizzabili con piccoli dati di ingombro e di peso ⁽²⁾; requisito, quest'ultimo, particolarmente desiderabile quando l'apparecchio debba essere trasportato — come spesso accade, per esempio, in esperienze sui raggi cosmici — in località diverse o in aereo. Per tali ragioni ci è sembrato utile riportare una breve descrizione di un generatore di impulsi usato per controllare dispositivi di coincidenze ritardate impiegati in esperienze eseguite circa due anni or sono ⁽³⁾.

⁽¹⁾ D. R. SCHEUNCH e F. P. COWAN: *Rev. Scient. Instr.*, **17**, 223 (1946); G. N. GLASOE e J. V. LEBACQZ, *Pulse generators* (McGraw Hill Book Co., 1949).

⁽²⁾ Il generatore di impulsi portatile descritto da TITTERTON e FITCH (*Rev. Scient. Instr.*, **18**, 639, (1947)) non si presta per l'analisi di circuiti di coincidenze perchè non possiede che una singola uscita.

⁽³⁾ M. CONVERSI; *Phys. Rev.*, **76**, 311, 444, 849 e 851 (1949); M. CONVERSI e H. K. TICHON: *Nuovo Cimento*, **7**, 677 (1950).

Lo schema elettrico dello strumento è dato in fig. 1. L'oscillatore è un multivibratore ad accoppiamento catodico la cui « frequenza di ripetizione », n , può essere variata variando la resistenza R_n (regolaggio « fino ») e la capacità C_n (una serie di condensatori intercambiabili mediante commutazione). Con una opportuna scelta di valori per i condensatori C_n la frequenza n può essere variata con continuità da $0,5 \text{ s}^{-1}$ a 5000 s^{-1} o più.

L'impulso negativo all'uscita dell'oscillatore è invertito e amplificato dallo stadio « invertitore »; in tal modo in corrispondenza del suo inizio ha inizio l'impulso del multivibratore « ritardatore » (pure ad accoppiamento catodico) che è sensibile solo ad impulsi positivi. La durata t dell'impulso di tale multivibratore può essere variata operando sul compensatore C_t . I limiti di varia-

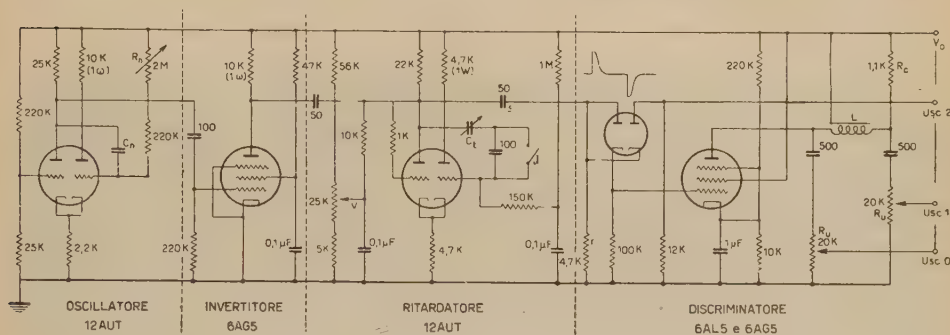


Fig. 1.

bilità per t sono naturalmente diversi a seconda che l'interruttore I sia chiuso od aperto.

L'impulso positivo all'uscita del ritardatore è differenziato attraverso il piccolo accoppiamento rc ; all'uscita 2 del « discriminatore » si avrà perciò un breve impulso negativo (11 V in ampiezza) corrispondente alla sua discesa, mentre sulla griglia della 6AG5 si avrà un breve impulso positivo corrispondente al suo inizio. Tale impulso è invertito ed amplificato dalla 6AG5 e ritardato di $2,5 \mu\text{s}$ dalla linea di ritardo L (terminante su una resistenza caratteristica $R_0 = 1,1 \text{ k}\Omega$). L'ampiezza degli impulsi presenti alle uscite 0 e 1 può essere aggiustata variando le resistenze R_u .

Assumendo come istante zero l'inizio dell'impulso all'uscita 1, la posizione dell'inizio dell'impulso all'uscita 2 può essere variata, operando su C_t , entro l'intervallo $(-0,5; 19) \mu\text{s}$ se I è chiuso, o entro l'intervallo $(-0,8; 8,5) \mu\text{s}$ se I è aperto. Questi valori sono corretti solo se il potenziale V sulla griglia della 12AU7 del ritardatore (fig. 1) ha il valore 60 V (V_0 essendo 300 V). La durata dell'impulso di un multivibratore ad accoppiamento catodico dipende infatti, come è noto, dal *bias* prescelto.

Naturalmente i due intervalli di tempo sopra specificati possono essere facilmente spostati verso valori negativi introducendo per mezzo di L un ritardo più grande. È altresì ovvio che i limiti superiori dei detti intervalli possono esser fatti grandi a piacere usando per C_t un condensatore variabile di capacità convenientemente elevata.

Gli impulsi alle uscite 1 e 2 sono stati fotografati come osservati su un sincroscopio il cui asse dei tempi era comandato dall'impulso all'uscita 0. Nel

Fig. 2.

fotogramma (fig. 2) la distanza tra i due impulsi è di $5 \mu s$ (l'asse dei tempi è orientato da sinistra verso destra).

La fig. 3 mostra l'apparecchio, completo di alimentazione stabilizzata (ottenuta mediante due tubi regolatori OA2) montato in una cassetta metallica da $18 \times 25 \times 25 \text{ cm}^3$.

SUMMARY

A portable pulse generator for the analysis of coincidence circuits is described.

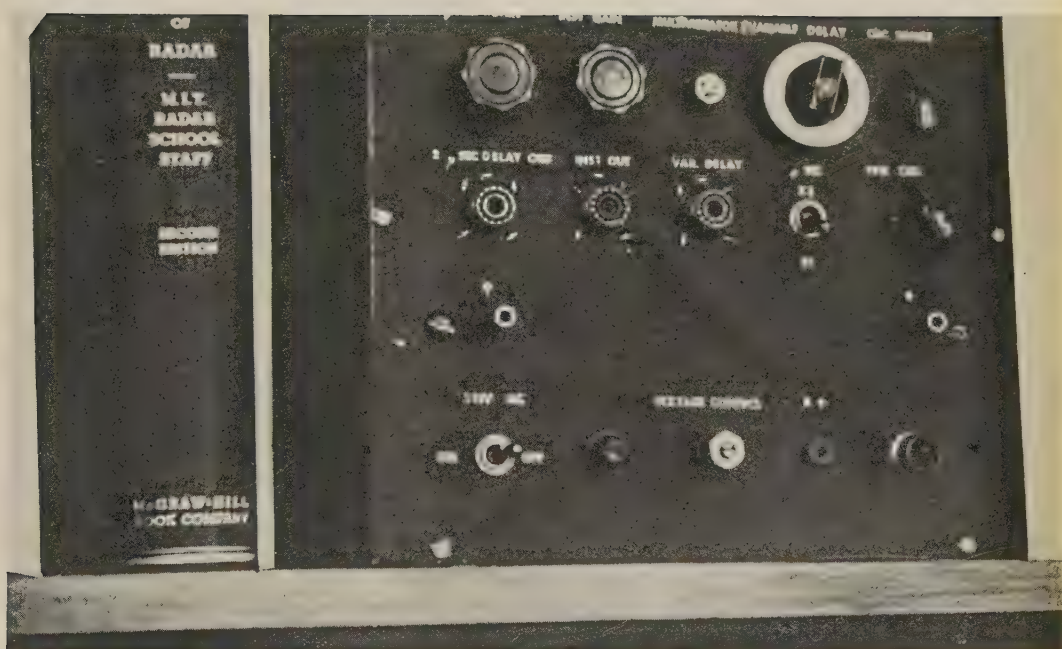


Fig. 3.

Un dispositivo per lo studio della produzione dei mesoni nella stratosfera (*).

M. CONVERSI (**)

Institute for Nuclear Studies - Università di Chicago

H. K. TICO (***)

Physics Department - Università di Chicago

(ricevuto il 9 Giugno 1950)

Riassunto. — Si descrive un apparato costruito negli anni 1947-48 e 1948-49 presso l'Università di Chicago, atto ad investigare il processo di creazione dei mesoni nella stratosfera. Si fa vedere come il dispositivo, portato a grande altezza, permetta di riconoscere se i mesoni prodotti (localmente) sono del tipo pesante (mesoni π) o del tipo ordinario (mesoni μ) e, inoltre, se essi sono generati da una radiazione ionizzante o meno. Si discutono altre possibili informazioni ottenibili attraverso misure effettuate alle quote accessibili con i palloni.

1. — Introduzione.

Per lungo tempo si è generalmente ritenuto che le particelle instabili di massa intermedia costituenti il grosso della componente « dura » della radiazione cosmica presente al livello del mare, si dovessero identificare con la particella introdotta da YUKAWA per spiegare le forze nucleari ⁽¹⁾. Questa opinione è stata rimossa in seguito ai risultati di due gruppi di esperienze. Da un canto

(*) Il presente lavoro è stato eseguito in parte con i mezzi messi a disposizione dall' « Office of Naval Research » e dall' « Atomic Energy Commission ».

(**) Presentemente all'University of Porto Rico, in assenza temporanea dall'Università di Roma.

(***) Presentemente all'University of California in Los Angeles.

⁽¹⁾ KULENKAMPFF: *Verh. d. D. Phys. Ges.*, p. 92 (1938); H. EULER e W. H. HEISENBERG: *Erg. d. exakt. Naturw.*, 17, 1 (1938).

si è dimostrato infatti con una esperienza diretta ⁽²⁾ ampiamente confermata da successive ricerche ⁽³⁾ che l'interazione dei mesoni presenti al l.d.m. con i nuclei è di parecchi ordini di grandezza inferiore a quella prevista dalla teoria ⁽⁴⁾; d'altro canto, i risultati delle osservazioni eseguite con la tecnica delle lastre fotografiche sviluppata dal gruppo di Bristol ⁽⁵⁾ e i risultati delle esperienze effettuate con il ciclotrone di Berkeley ⁽⁶⁾ hanno provato che esistono, accanto ai mesoni « ordinari » (mesoni μ) aventi una vita media di circa $2,2 \mu\text{s}$, mesoni « pesanti » (mesoni π) i quali si disintegrano in mesoni ordinari con una vita media dell'ordine di 10^{-8} s.

Sembrò allora ragionevole pensare che i mesoni creati negli strati più alti dell'atmosfera dalla radiazione cosmica primaria dovessero essere i mesoni pesanti, giacchè alla debole interazione dei mesoni ordinari con i nuclei, dimostrata dal fatto che i mesoni ordinari negativi vengono catturati in seguito al frenamento in materiali di basso numero atomico, deve presumibilmente corrispondere una piccola sezione d'urto per il processo di creazione.

Se questo è il caso, allora la componente mesonica presente al livello del mare si deve pensare come essenzialmente costituita dai prodotti di disintegrazione dei mesoni pesanti generati nell'alta atmosfera dalla radiazione primaria. L'idea di un simile meccanismo è stata suggerita da MARSHAK e BETHE ⁽⁷⁾ prima ancora della scoperta dei mesoni pesanti. Nessuna prova sperimentale diretta ne è stata data, tuttavia, fino ad ora.

Il dispositivo descritto e discusso nel presente articolo fu progettato e costruito presso l'Università di Chicago con lo scopo di ottenere informazioni sul processo di produzione dei mesoni nella stratosfera e in particolare di controllare se il meccanismo cui si è ora accennato possa o meno ritenersi accettabile.

L'esperienza fu basata sull'idea che mentre i mesoni ordinari negativi si disintegrano dopo essere stati frenati in materiali di basso numero atomico (l'assorbitore prescelto era di grafite) i mesoni negativi pesanti vengono invece catturati; ipotesi, quest'ultima, che è oggi generalmente accettata ⁽⁸⁾. Poichè è noto che i mesoni (qualunque sia la loro natura) sono generati dalla radiazione primaria con una molteplicità media di circa 5, la produzione di mesoni in un « generatore » locale si presenterà in generale come uno sciame penetrante. L'osservazione di eventi ritardati (ritardi dell'ordine del μs) conseguenti il

⁽²⁾ M. CONVERSI, E. PANCINI e O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **68**, 232 (1945); **71**, 209 (1947).

⁽³⁾ T. SIGURGEIRSSON e A. YUMAKAWA: *Phys. Rev.*, **71**, 319 (1947); H. K. TICHO: *Phys. Rev.*, **74**, 1337 (1948) (anche per referenze di altri lavori precedenti).

⁽⁴⁾ S. TOMONAGA e G. ARAKI: *Phys. Rev.*, **58**, 90 (1940); E. FERMI, E. TELLER e J. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **71**, 314 (1947); B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 379 (1949).

⁽⁵⁾ C. G. M. LATTES, G. P. S. OCCHIALINI e C. F. POWELL: *Nature*, **160**, 453 e 486 (1947).

⁽⁶⁾ C. G. M. LATTES e E. GARDNER: *Science*, **107**, 270 (1948); G. P. S. OCCHIALINI e C. F. POWELL: *Nature*, **161**, 551 (1948).

⁽⁷⁾ R. E. MARSHAK e H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **72**, 506 (1947).

⁽⁸⁾ Questa ipotesi poteva essere controllata dall'esperienza stessa qualora alternativamente si fosse ammesso che i mesoni generati dalla componente primaria fossero del tipo pesante.

frenamento di mesoni associati con sciami penetranti prodotti nel generatore, dovrà allora ascriversi in generale a mesoni prodotti localmente. Se lo schema cui si è sopra accennato è corretto, c'è dunque da aspettarsi, nell'alta atmosfera, una netta differenza tra il comportamento dei mesoni dei due segni accompagnati da sciami penetranti locali: i mesoni negativi saranno infatti catturati dopo il frenamento, talchè nessun evento ritardato e associato con sciami penetranti dovrà registrarsi in seguito al loro frenamento; i positivi invece si disintegreranno, in un tempo dell'ordine di 10^{-8} s⁽⁹⁾, in mesoni ordinari di brevissimo percorso⁽⁵⁾ i quali, a loro volta, daranno luogo ad eventi ritardati dell'ordine del μ s attraverso l'emissione di elettroni di disintegrazione.

La effettiva effettuazione dell'esperienza (la cui preparazione ha avuto inizio nell'autunno 1947) mediante il lancio di palloni nella stratosfera⁽¹⁰⁾, è stata notevolmente ritardata da una serie di circostanze accidentali più ancora che dalle considerevoli difficoltà tecniche dovute soprattutto alle limitazioni di peso imposte dall'uso dei palloni. Misure preliminari, eseguite a 9100 m sul l.d.m. in un aereo B-29 della Marina americana, hanno dato risultati di insignificante interesse, in parte per la scarsità degli eventi osservati, in parte per un parziale disfunzionamento dell'apparato durante le ore di volo.

Per quanto i risultati ottenuti nel frattempo sulla natura delle particelle presenti negli sciami penetranti prodotti localmente a 3500 m sul l.d.m.⁽¹³⁾ contengano, attraverso l'identificazione di tali particelle con i mesoni pesanti, parte dei risultati ottenibili con l'esperienza in oggetto, ci è ugualmente sembrato utile di riportare una descrizione del dispositivo sperimentale da noi realizzato, per mostrarne alcune tuttora notevoli possibilità di impiego come mezzo per l'indagine del processo di produzione dei mesoni nell'alta atmosfera.

2. — Descrizione dell'apparato.

Il dispositivo sperimentale, due sezioni del quale sono rappresentate in scala nella fig. 1, può considerarsi come un rivelatore di mesoni positivi o negativi, associati o meno a sciami localmente prodotti da una radiazione ionizzante o neutrale. Esso consta essenzialmente di un « generatore » di ferro nel quale ha luogo la produzione dei mesoni da parte delle particelle primarie⁽¹⁴⁾ incidenti, di una « lente magnetica » del tipo descritto in precedenti

⁽⁹⁾ J. R. RICHARDSON: *Phys. Rev.*, **74**, 1720 (1948); MARTINELLI e PANOFSKY: *Phys. Rev.*, **77**, 465 (1950).

⁽¹⁰⁾ È ovvio che per ottenere informazioni sul processo di produzione dei mesoni conviene effettuare le misure alla massima altezza praticamente raggiungibile; al di sopra, se possibile, della quota dove la radiazione generatrice dei mesoni è dello stesso ordine di grandezza della radiazione mesonica secondaria. Misure di M. SCHEIN e W. G. STROUD⁽¹¹⁾ indicano che tale quota corrisponde ad una pressione residua compresa tra 5 e 10 cm Hg⁽¹²⁾.

⁽¹¹⁾ M. SCHEIN e W. G. STROUD, risultato non pubblicato, riportato in D. J. X. MONTGOMERY: *Cosmic Ray Physics* (Princeton Un. Press, 1949), p. 232.

⁽¹²⁾ Cfr. anche B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

⁽¹³⁾ O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **77**, 1 (1950).

⁽¹⁴⁾ Qui e nel seguito la parola « primaria » va intesa nel senso di « generatrice di mesoni ».

lavori ⁽¹⁵⁾, di un « assorbitore » di grafite per il frenamento dei mesoni prodotti nel generatore e concentrati dal campo magnetico della lente, e di vari gruppi di contatori di Geiger per la selezione degli eventi desiderati.

Le dimensioni delle varie parti e le lunghezze efficaci dei contatori (aventi

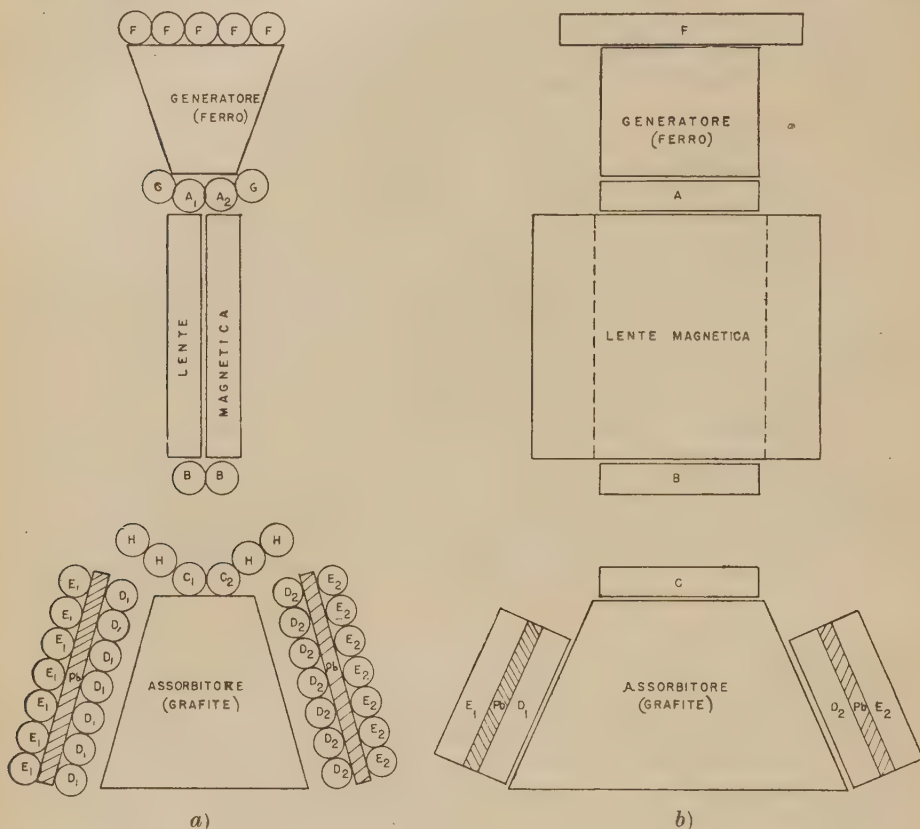


Fig. 1. — Due sezioni verticali dell'apparato,

tutti un diametro esterno di 2,54 cm, pareti di ottone di 0,8 mm e tutti riempiti con la consueta miscela di alcool ed argon) risultano dalla fig. 1 ⁽¹⁶⁾.

Mediante il dispositivo elettrico descritto nel n. 4 è possibile registrare i seguenti tipi di eventi:

a) Coincidenze triple (ABC), dove « A » sta per « A_1 o A_2 indifferentemente » e, similmente, « C » per « C_1 o C_2 indifferentemente »;

b) Coincidenze quaduple (A_1A_2BC), (ABC_1C_2), ($ABCF$), ($ABCG$), ($ABCH$);

c) Coincidenze ritardate, per ritardi minori di 6,5 μ s, tra l'impulso istantaneo di ciascuna delle coincidenze sopra elencate e l'impulso ritardato di un

⁽¹⁵⁾ G. BERNARDINI e M. CONVERSI: *La Ric. Scient.*, **11**, 858 (1940); G. BERNARDINI e coll.: *Phys. Rev.*, **68**, 109 (1945).

⁽¹⁶⁾ I contatori D ed E in fig. 1-a hanno una lunghezza efficace di 20 cm.

contatore D (D_1 o D_2 indifferentemente), di un contatore E (E_1 o E_2) o di un contatore D ed uno E allo stesso tempo;

d) Eventi in cui ciascuna delle coincidenze elencate in a) e b) è accompagnata dalla scarica ritardata di un contatore D_1 e di un contatore D_2 (oppure di un contatore E_1 e di uno E_2) purchè i ritardi negli impulsi dei due contatori differiscano di almeno $\sim 1 \mu s$ essendo entrambi minori di $6,5 \mu s$.

Il modo con cui tutti questi tipi di eventi possono essere registrati si può brevemente descrivere così:

Al sopraggiungere di ogni coincidenza tripla (ABC) due impulsi lineari della stessa ampiezza, il primo avente una durata di $6,5 \mu s$ e il secondo di circa $1000 \mu s$, vengono inviati, simultaneamente, ciascuno ad una delle due placchette per la deflessione orizzontale di un tubo oscillografico normalmente spento (v. anche fig. 6). Le tensioni base delle placchette sono scelte in modo che l'intersezione virtuale del fascio catodico con il campo sensibile del tubo oscillografico sia normalmente nel centro del campo stesso. Poichè nei primi $6,5 \mu s$ può ritenersi trascurabile l'effetto dell'impulso lineare di $1000 \mu s$ sul fascio catodico, si può affermare che al sopraggiungere di una tripla (ABC) il punto di virtuale intersezione del fascio descrive, nei primi $6,5 \mu s$, una metà del campo oscillografico (*prima metà*) muovendosi di moto uniforme; nei successivi μs durante i quali si sviluppa l'altro impulso lineare (di $1000 \mu s$) esso descriverà poi, molto più lentamente, la *seconda metà* del campo.

Ora il tubo oscillografico, che come si è detto è normalmente spento, viene acceso per la durata di circa $7 \mu s$ da ognuno dei tipi di coincidenze elencati in a) e b); ma l'impulso di $7 \mu s$ che produce l'accensione del tubo, raggiunge la griglia di questo con un ritardo diverso per ciascun tipo di coincidenza. Più precisamente tale ritardo è di circa $150 \mu s$ per una coincidenza (ABC) e, per ciascuno dei successivi tipi di coincidenze elencati in a) e b), è approssimativamente $150 \mu s$ maggiore del ritardo corrispondente al tipo di coincidenza immediatamente precedente nella lista.

Da quanto precede si comprende allora che in corrispondenza di ciascuna delle coincidenze elencate in a) e b), apparirà, sulla seconda metà del campo oscillografico, una lineetta luminosa (praticamente un punto luminoso) la cui posizione lungo l'asse dei tempi è determinata dal particolare tipo di coincidenza che l'ha prodotta (v. fig. 2).

Il tubo oscillografico è altresì acceso da ogni coincidenza ritardata (ABC/D_r) o (ABC/E_r), purchè il ritardo r con cui l'impulso dei contatori D od E segue l'istante di arrivo della particella che ha causato la tripla (ABC) non superi $6,5 \mu s$. In tal caso l'accensione del tubo oscillografico avviene, rispetto all'inizio dell'impulso lineare di $6,5 \mu s$ usato per la deviazione orizzontale nella prima metà del campo oscillografico, con un ritardo che è sensibilmente uguale ad r . D'altra parte gli impulsi dei contatori D ed E , trasformati in impulsi positivi della durata di $\sim 1 \mu s$, sono inviati alle placchette rispettivamente superiore ed inferiore della deviazione verticale. Se una coincidenza (ABC/D_r) ha luogo, un impulso « positivo » (intendasi: orientato verso l'alto) apparirà dunque nella prima metà del campo oscillografico, mentre un impulso « negativo » (intendasi: orientato verso il basso) apparirà in corrispondenza di un evento (ABC/E_r). In entrambi i casi la posizione dell'impulso rispetto al centro del campo consente di determinare il ritardo pertinente all'evento osservato (v. fig. 2).

Infine, nel caso di un evento ($ABC/(DE)_r$) i due impulsi sulle due plac-

chette della deviazione verticale agiranno simultaneamente in senso opposto sul fascio catodico in modo da non avere alcun sensibile effetto su di esso. In tal caso — che si presenta per esempio ogni qual volta una particella che attraversa il telescopio definito dalle coincidenze (ABC) è seguita casualmente, entro $6,5 \mu s$, da una seconda particella che attraversa il vasto angolo solido corrispondente alla (DE) — l'evento appare all'oscillografo come una linea orizzontale nella prima metà del campo avente inizio in un punto la cui distanza dal centro del campo è associata, al solito, al valore del ritardo con cui la doppia (DE) segue la tripla (ABC) (v. fig. 3).

In conclusione la prima metà del tubo è utilizzata per registrare eventi ritardati, la seconda metà per registrare eventi istantanei. L'associazione dei vari tipi di coincidenze istantanee e ritardate consente allora di ottenere, come mostreremo nel n. successivo, un cospicuo numero di informazioni sulla natura dell'evento responsabile delle coincidenze osservate.

Le due lastre di Pb (spessore $1,25 \text{ cm}$) interposte tra i contatori D ed E (fig. 1) hanno lo scopo di impedire agli elettroni di disintegrazione dei mesoni frenati nell'assorbitore di raggiungere i contatori E . In tal modo mentre una coincidenza (ABC/D_r) può essere causata tanto dalla disintegrazione di un mesone frenato nell'assorbitore quanto da un evento casuale, una coincidenza (ABC/E_r) non può essere che dovuta ad un evento casuale. Osservando d'altra parte che in virtù del vasto angolo solido definito dalle doppie (DE) la grande maggioranza degli eventi casuali si presentano come coincidenze ($ABC(DE)_r$), si riconosce che il piccolo fondo di eventi casuali nella registrazione delle coincidenze (ABC/D_r) si può assumere eguale in intensità all'intensità delle coincidenze (ABC/E_r), cosicchè la differenza (ABC/D_r) — (ABC/E_r) rappresenta l'intensità degli eventi associati con il decadimento dei mesoni frenati nell'assorbitore. In realtà questo è vero con buona approssimazione purchè si prendano in considerazione soltanto eventi ritardati corrispondenti a ritardi maggiori di un certo valore minimo r_m . Per ritardi minori di r_m , infatti, un evento (ABC/D_r) può essere occasionalmente causato da una particella che, emergendo dal fondo della lente magnetica con un angolo tale da attraversare uno almeno dei contatori D e nessuno degli E , produce una scarica ritardata (ritardo « spurio ») nel contatore attraversato. Poichè per i contatori impiegati la probabilità di un ritardo spurio maggiore di $0,5 \mu s$ è dell'ordine dell' 1 ^0_{100} ⁽¹⁷⁾, e poichè d'altra parte la frequenza delle particelle diffuse all'uscita del magnete in modo da attraversare uno dei contatori D e nessuno degli E , si può stimare essere grossolanamente dello stesso ordine di grandezza della frequenza con cui i mesoni vengono frenati nell'assorbitore ⁽¹⁸⁾, si riconosce che la scelta $r_m = 0,5 \mu s$ è pienamente soddisfacente.

⁽¹⁷⁾ H. K. TICHØ: *Phys. Rev.*, loc. cit.

⁽¹⁸⁾ A bassa quota i mesoni frenati nell'assorbitore sono mesoni ordinari provenienti dagli strati di aria sovrastanti il dispositivo. Ad altissima quota invece essi sono presumibilmente in prevalenza mesoni pesanti creati nel generatore. Il rapporto tra il numero di particelle frenate nell'assorbitore e il numero di quelle fortemente diffuse all'uscita del magnete non dovrebbe dipendere in modo critico dalla quota giacchè in entrambi i casi si tratta di particelle di bassa energia, situate approssimativamente nella stessa regione dello spettro energetico. La grossolana valutazione menzionata sopra è stata effettuata naturalmente con riferimento al livello del mare.

Esempi dei vari tipi di eventi, ottenuti in un aereo B-29 a 9100 m sul l.d.m., sono riportati nelle figg. 3, 4 e 5.

3. - Discussione degli eventi registrabili.

Per semplificare la discussione che segue indicheremo brevemente con (S) ognuna delle coincidenze quaduple (A_1A_2BC) , (ABC_1C_2) , $(ABCG)$, $(ABCH)$, il verificarsi di ciascuna delle quali indica in generale la presenza di uno sciame avente origine nel generatore. I simboli (SF) , (S/D_r) , ecc., indicheranno allora eventi in cui una o più delle (S) sono accompagnate dalla scarica istantanea dei contatori F , dalla scarica ritardata dei contatori D , ecc.

Per quanto detto alla fine del n. precedente a proposito degli eventi (ABC/E_r) ed $(ABC/(DE)_r)$, in nessun caso gli eventi (S/E_r) ed $(S/(DE)_r)$ possono essere associati alla disintegrazione di mesoni frenati nell'assorbitore. Al contrario gli eventi (S/D_r) , (SF/D_r) non possono essere prodotti (a prescindere dal piccolo fondo di eventi spurii) che dalla disintegrazione di mesoni frenati nell'assorbitore ed associati a sciame capaci di produrre le coincidenze quaduple osservate. Tali sciame, inoltre, debbono avere origine in prossimità dell'apparecchio e, perciò, prevalentemente nel generatore. Se infatti si ammette, come sembra ragionevole, che la radiazione generatrice di mesoni venga assorbita esponenzialmente con uno « spessore di assorbimento » di circa 125 g/cm^2 ⁽¹²⁾, si riconosce che la sua intensità è già ridotta a metà all'uscita del generatore ed a 0,14 all'uscita della lente magnetica.

L'evento tipico corrispondente alla registrazione di una (SF/D_r) si ha dunque quando uno sciame contenente mesoni viene prodotto nel generatore da una particella ionizzante ed uno almeno dei mesoni dello sciame viene frenato nell'assorbitore dando luogo ad una coincidenza ritardata. Se la particella primaria è elettricamente neutra l'evento si presenterà invece come una (S/D_r) ⁽¹³⁾. In entrambi i casi, se i mesoni dello sciame sono mesoni ordinari, gli eventi (SF/D_r) o (S/D_r) saranno presenti indipendentemente dal senso del campo magnetico nella lente, giacchè i mesoni ordinari si disintegrano nella grafite qualunque sia il segno della loro carica. Se invece lo sciame non contiene mesoni ordinari ma bensì mesoni pesanti, allora si registreranno eventi (SF/D_r) o (S/D_r) solo quando la lente converge le particelle positive. In tal caso infatti il mesone frenato si disintegra in un tempo dell'ordine di 10^{-8} s in un mesone ordinario di brevissimo range ⁽⁵⁾ il quale, a sua volta, emette un elettrone di disintegrazione con vita media di $2,2 \mu\text{s}$; mentre allorchè la lente converge le particelle negative i mesoni pesanti frenati nell'assorbitore vengono presumibilmente catturati talchè non ha luogo alcuna coincidenza ritardata.

L'analisi degli eventi (S/D_r) e (SF/D_r) ottenuti ad alta quota con campo

⁽¹³⁾ Il rendimento dei contatori F come contatori di anticoincidenza è stato misurato al livello del mare ed è risultato essere 0,92. Naturalmente a grandi altezze questo valore non può correttamente essere adoperato per determinare quale percentuale delle (S/D_r) è dovuta a primari ionizzanti, a causa del contributo dei primari incidenti otto grandi angoli zenitali.

magnetico alternativamente convergente le particelle dei due segni, consente dunque di riconoscere se i mesoni creati nel generatore sono del tipo ordinario o del tipo pesante ⁽²⁰⁾.

Ciò è vero, naturalmente, nei limiti entro i quali si può considerare trascurabile il contributo dato da sciame prodotti nella parte più bassa della lente e sotto l'ipotesi di una completa esclusione dei mesoni di segno opposto a quello delle particelle concentrate nell'assorbitore ⁽²¹⁾.

Va osservato inoltre che per una corretta interpretazione dei risultati è opportuno considerare separatamente i vari tipi di coincidenze quadruple accompagnate dalla scarica ritardata dei contatori D . Per esempio la registrazione di una quadrupla ($ABCG$) non implica che lo sciame che l'ha prodotta sia di natura penetrante. Si noterà, di più, che ogni particella proveniente dal generatore e frenata nell'assorbitore senza aver attraversato il magnete, deve necessariamente aver attraversato uno dei contatori G . Una simile particella può essere un mesone di segno opposto a quello delle particelle concentrate dalla lente e se esso è accompagnato da un'altra particella che attraversa il telescopio (ABC) può dare origine ad una falsa interpretazione. Appare dunque preferibile, *a priori*, considerare i contatori G come contatori di anti-coincidenza, escludendo le ($ABCG$) dalla categoria delle quadruple (S) che in associazione con una coincidenza ritardata vengono utilizzate per identificare la natura del mesone osservato.

Le coincidenze (ABC_1C_2) ed ($ABCH$) associate con la scarica ritardata dei contatori D possono invece entrambe essere utilizzate in tal senso. La loro analisi può altresì fornire qualche informazione qualitativa sulla distribuzione angolare dello sciame penetrante che le ha prodotte.

L'incertezza nel valore del rendimento del nostro apparato come rivelatore degli sciame localmente prodotti ci impedisce di prevedere quale percentuale degli eventi (ABC/D_r) sono in realtà coincidenze ritardate accompagnate da sciame. A bassa quota, dove la produzione locale di mesoni è poco frequente, gli eventi detti possono praticamente tutti attribuirsi a mesoni ordinari provenienti dall'aria sovrastante ⁽²³⁾. Al di sopra di una certa quota invece (v. la nota ⁽¹⁰⁾) mentre la produzione locale di mesoni dovrebbe diventare sempre più cospicua, il numero dei mesoni provenienti dall'esterno dovrebbe progressivamente diminuire. Al limite dell'atmosfera gli eventi (ABC/D_r) dovrebbero tutti attribuirsi a mancato rendimento del rivelatore di sciame.

Circa le intensità dei vari tipi di eventi ad un'altezza raggiungibile con i palloni si può osservare quanto segue. Ad una quota corrispondente ad una pressione residua di 2 cm Hg l'intensità della componente dura è 13,5 volte

⁽²⁰⁾ Soltanto al termine dei voli in B-29 gli autori vennero a conoscenza del risultato ottenuto da PICCIONI ⁽¹³⁾ sulla presenza di mesoni pesanti negli sciame penetranti localmente prodotti.

⁽²¹⁾ Un calcolo come quello riportato in un precedente lavoro ⁽²²⁾ mostra che per il nostro dispositivo tale ipotesi è ragionevole se il campo magnetico della lente non è inferiore a circa 12 000 gauss.

⁽²²⁾ M. CONVERSI, E. PANCINI e O. PICCIONI: *Nuovo Cimento*, **3**, 372 (1946).

⁽²³⁾ La percentuale di mesoni pesanti nell'atmosfera non può essere che una frazione trascurabile a causa della brevità della loro vita media.

Prima metà del
campo oscillo-
grafico.

a)

b)

c)

d)

Seconda metà
del campo oscil-
lografico.

a)

b)

c)

d)

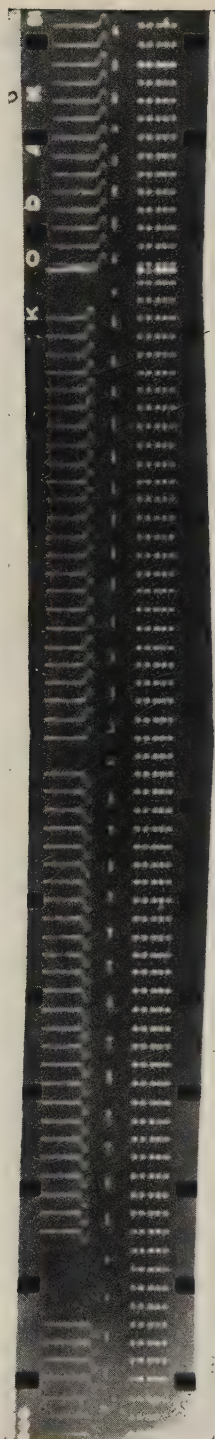


Fig. 2. - Serie di eventi ottenuti per mezzo di impulsi artificiali succedentisi con una frequenza di 0,7 s circa. Con il simbolismo introdotto all'inizio del n. 3 gli eventi riprodotti sono rispettivamente: a) (SD); b) (S/D_r); c) (S/E_r); d) (SE), il ritardo r avendo un valore prossimo a $1,7 \mu s$. La presenza della serie di puntini luminosi nella zona centrale della pellicola indica che la lente magnetica concentrava le particelle negative quando la pellicola è stata impressionata. - Il dispositivo con cui si sono ottenuti gli eventi riprodotti nelle fig. 2, 3, 4 e 5 differiva lievemente da quello descritto nel testo. In esso infatti i due contatori B invece di essere in parallelo erano usati per ottenere quadruple (AB_1B_2C), mentre i contatori H mancavano del tutto. Le distanze e le posizioni mutue tra i punti luminosi rappresentanti le varie coincidenze quadruple erano inoltre leggermente diverse. Le lievi modifiche apportate al dispositivo sono state in parte suggerite dai risultati preliminari ottenuti a Chicago e in B-29.

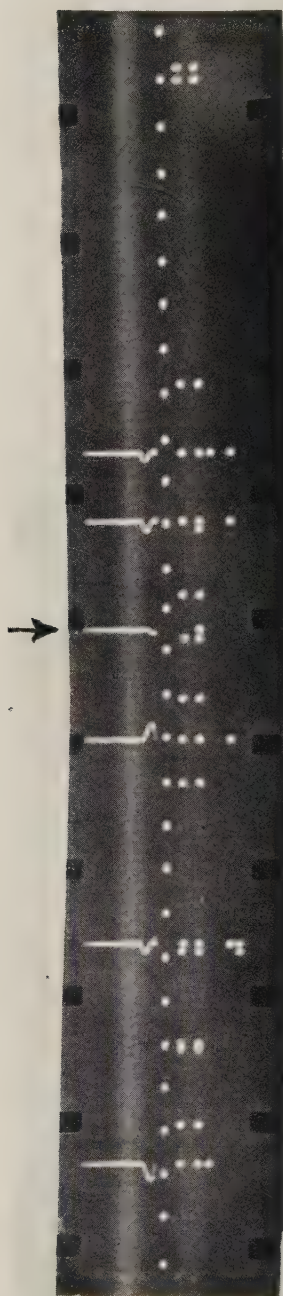


Fig. 3. - Esempi di eventi (*SD*), (*SE*), (*SDE*), (*SFDE*), ecc. ottenuti in un aereo B-29 a 9 100 m sopra il l.d.m. È press'a poco a questa quota che si ha un massimo nell'intensità dei grandi sciami (cfr. H. L. KRAYBILL: *Phys. Rev.*, **76**, 1092 (1949)). Non deve perciò sorprendere la frequenza degli eventi multipli riscontrati in questa e nella successiva fotografia. L'evento indicato dalla freccia è un (*ABCDE*), verosimilmente prodotto da due particelle casualmente associate nel tempo e attraversanti rispettivamente il telescopio definito dalle (*ABC*) e quello corrispondente alle (*DE*). Come nelle fig. 2 e 5 la presenza dei puntini luminosi nel centro della pellicola indica che la lente magnetica convergeva le particelle negative.

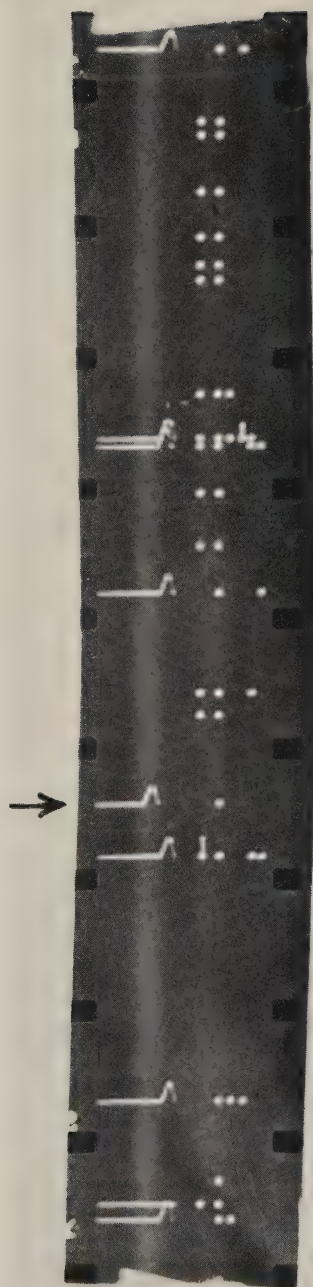


Fig. 4. — Altri esempi di eventi ottenuti a 9100 m sopra il l.d.m. L'evento (ABC/D_r) indicato dalla freccia rappresenta la disintegrazione di un mesone avuta luogo con un ritardo di circa $2\mu s$. L'assenza del puntino luminoso corrispondente alla scarica dei contatori F indica presumibilmente mancato rendimento di tali contatori. L'assenza dei puntini luminosi nel centro della pellicola mostra che la lente convergeva le particelle positive.

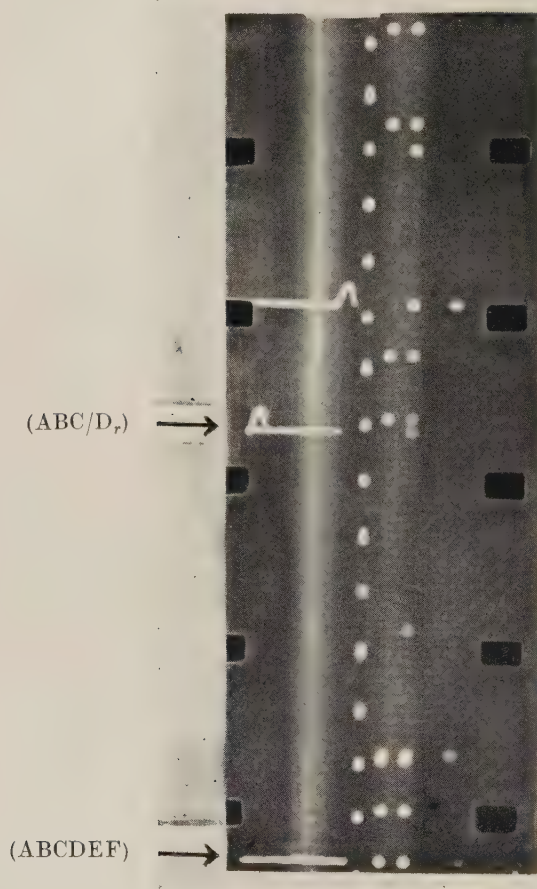


Fig. 5. — Altro esempio di coincidenza ritardata (ABC/D_r) da attribuire al decadimento di un mesone ordinario. Il ritardo r è in questo caso notevole (circa $6 \mu s$) e la traccia luminosa è dovuta al « ritorno » della « sweep ».

maggiore che al livello del mare ⁽²⁴⁾. Poichè da misure effettuate a Chicago l'intensità degli eventi (ABC) è risultata di circa 85 coine./ora, l'intensità di tali eventi ad una quota corrispondente a 2 cm Hg può prevedersi essere di circa 1200 coine./ora. D'altra parte presumibilmente il 70 % (o più) della radiazione ionizzante presente a quella quota dovrebbe essere capace di generare mesoni ⁽¹¹⁾, ⁽¹²⁾ (il resto essendo costituito essenzialmente di mesoni prodotti nell'atmosfera sovrastante). Se la radiazione generatrice di mesoni ha uno « spessore di assorbimento » di 125 g/cm² in aria ⁽¹²⁾ e se si ammette che il rendimento del nostro apparecchio come rivelatore di sciame non sia inferiore al 50 %, si vede che l'intensità totale delle quadruple (S) a grande altezza non dovrebbe essere inferiore a 200 eventi/ora.

Il numero dei mesoni frenati nell'assorbitore (e quindi l'intensità degli eventi (SF/D_r), ecc.) dipende naturalmente dalle distribuzioni energetica ed angolare con cui essi vengono generati *in loco*. Si può forse sperare di ottenere qualche grossolana informazione sullo spettro in *range* dei mesoni creati nel generatore, sia dal confronto tra le intensità delle quadruple accompagnate e non accompagnate da coincidenze ritardate, sia dal confronto tra l'intensità delle (A_1A_2BC) con le intensità delle (ABC_1C_2) e ($ABCH$).

Osserviamo infine che eventi caratterizzati dalla scarica ritardata sia dei contatori D_1 che D_2 non possono essere che molto rari. È chiaro, per altro, che anche pochi eventi siffatti dimostrerebbero in modo inequivocabile la produzione simultanea di più mesoni.

4. — La realizzazione tecnica dell'apparato.

La principale difficoltà nella realizzazione del dispositivo precedentemente descritto deriva dalle limitazioni di peso imposte dall'uso dei palloni. Con un pallone del nuovo tipo, solo recentemente usato per ricerca ⁽²⁵⁾, è possibile tuttavia trasportare circa 30 kg di materiale ad una altezza corrispondente ad 1 cm Hg. Per quanto questa cifra sia relativamente assai considerevole, va notato che il peso globale del generatore, lente magnetica, lastre di Pb e assorbitore è di circa 47 kg. Per poter effettuare l'esperienza ad altissima quota mediante il lancio di tre palloni del tipo detto (un lancio di più di tre palloni siffatti non sembra per il momento facilmente effettuabile) appare essenziale, dunque, ridurre al minimo il consumo della lente magnetica e dell'apparato elettrico, tenendo presente che la durata di un volo può anche raggiungere le 10 ore.

La lente magnetica è stata realizzata con « Vanadium Permendur », un materiale che dovrebbe fornire una induzione di 16 000 gauss per un campo magnetizzante di circa 6 oersted ⁽²⁶⁾. In realtà le due lenti successivamente costruite con il materiale fornito dalla Alleghany Co. richiedevano un campo magnetizzante considerevolmente maggiore ed è stata questa una delle cause che hanno considerevolmente ostacolato l'effettuazione del volo.

⁽²⁴⁾ Cfr. per es., M. SCHEIN, W. P. JESSE e E. O. WOLLAN: *Phys. Rev.*, **59**, 615 (1941); M. SCHEIN e coll., risultato riportato in D. J. X. MONTGOMERY, *l. c.*, p. 163.

⁽²⁵⁾ Usati all'Università di Minnesota, Minneapolis.

⁽²⁶⁾ Secondo le curve di magnetizzazione fornite dalla Alleghany Co.

Lo schema generale per la registrazione elettrica degli eventi è riportato in fig. 6. Gli impulsi sono positivi in tutti i punti di questo schema, eccettuate le entrate dei due circuiti *SL* e dei circuiti di entrata *CE* connessi ai contatori.

I numerosi circuiti di coincidenze (*CD* e *CT*) e i « mescolatori di impulsi » *M* sono tutti realizzati con diodi a cristallo (Sylvania 1N34) sulla base degli schemi

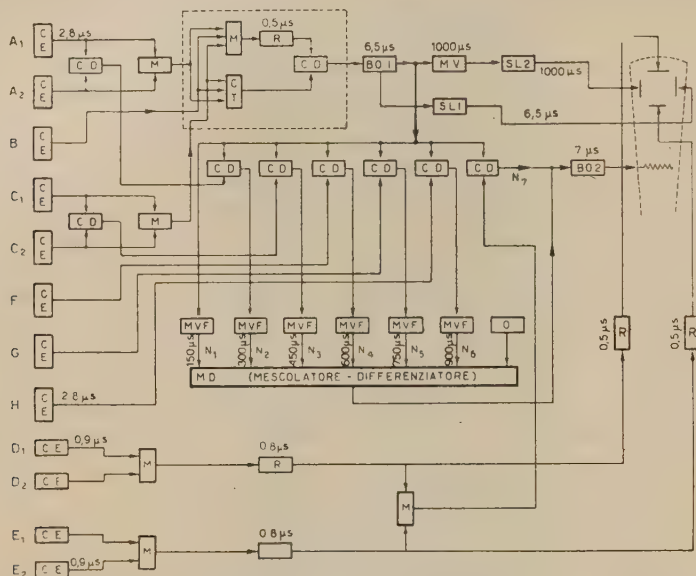


Fig. 6. - Schema generale della registrazione: *BO*, « Blocking oscillator »; *CD*, coincidenze doppie; *CE*, circuiti di entrata; *CT*, coincidenze triple; *M*, mescolatore di impulsi; *MV*, multivibratore; *R*, linea di ritardo; *SL*, « spargiatore lineare ».

suggeriti da HOWLAND, SCHROEDER e SHIPMAN⁽²⁷⁾. In tal modo si è ridotto il consumo dei circuiti di coincidenze alla sola piccola corrente anodica ($3 \div 4$ mA

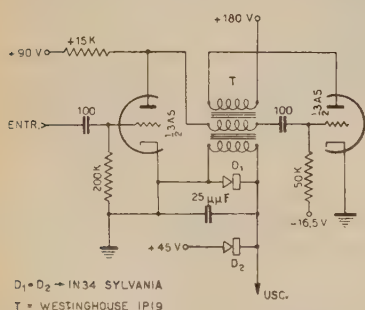


Fig. 7. - Circuito di entrata *CE* per i contatori *A*, *B*, *C*; *F*, *G*, *H*.

con 90 V). Come osservato da HOWLAND *et al.*, per un prescelto valore della resistenza di carico anodico, la risposta di tali circuiti agli impulsi in entrata è tanto migliore quanto più bassa è l'impedenza e quanto maggiore è l'ampiezza degli impulsi stessi. Un circuito di precoincidenza soddisfacente al nostro scopo per il suo limitato consumo (0,25 W), per la sua elevata sensibilità (3,5 V) e per la bassa impedenza (700 Ω) dell'impulso in uscita è quello riportato in fig. 7. Il solo inconveniente di questo circuito, di fornire cioè impulsi in uscita ritardati di qualche decimo di μ s rispetto all'impulso di comando, non

(27) B. HOWLAND, C. A. SCHROEDER e J. D., JR. SHIPMAN: *Rev. Scient. Instr.*, **18**, 551 (1947).

sembra esser serio se si osserva che tale ritardo dipende sensibilmente solo dal *bias* della seconda metà della 3A5 e perciò si conserva presumibilmente costante durante l'effettuazione dell'esperienza in pallone. Le notevoli caratteristiche dell'impulso di uscita sono mostrate in fig. 8.

La parte del dispositivo nel rettangolo tratteggiato di fig. 6 ha lo scopo di far sì che l'impulso di coincidenza tripla all'uscita di *CD* abbia inizio con

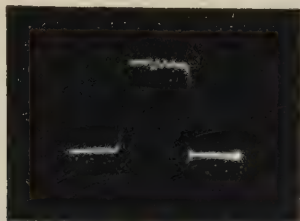


Fig. 8. - Fotogramma dell'impulso all'uscita del circuito di fig. 7.

un ritardo costante di $0,5 \mu\text{s}$ rispetto all'inizio del primo dei tre impulsi forniti dai tre contatori attraversati (purchè nessuno dei tre impulsi abbia luogo con un ritardo maggiore di $0,5 \mu\text{s}$). Questo accorgimento, originalmente suggerito da SANDS⁽²⁸⁾, serve a ridurre in modo considerevolissimo l'effetto dei ritardi spuri dei contatori.

L'impulso all'uscita di *CD* che ha luogo in corrispondenza di ogni (*ABC*) comanda il BO1 (fig. 9) il quale fornisce alle sue due uscite impulsi rettangolari

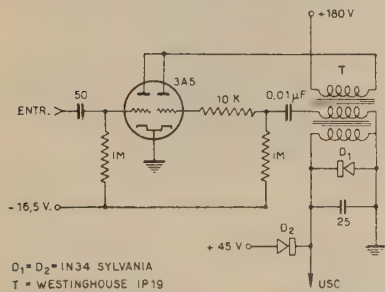


Fig. 9. - Schema del circuito BO1 (il circuito BO2 è analogo ma fornisce impulsi di ampiezza doppia (90 V)).

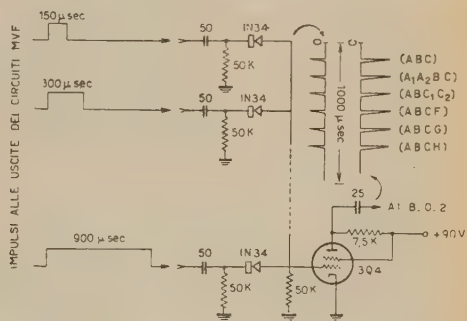


Fig. 10. - Schema del circuito MD (mescolatore-differenziatore).

di segno opposto, della durata di $6,5 \mu\text{s}$ circa. L'uscita negativa è collegata allo «sparpagliatore» SL1 (che, al pari di SL2, è del tipo «bootstrap» ed utilizza una 1L4 ed una 3Q4) per la formazione dell'impulso lineare di $6,5 \mu\text{s}$ destinato alla deflessione orizzontale del fascio catodico nella prima metà del campo oscillografico. L'impulso positivo all'altra uscita di BO1, che chiamo-

⁽²⁸⁾ M. SANDS: *Phys. Rev.*, **77**, 180 (1950).

remo « impulso pilota », è utilizzato per la formazione delle varie coincidenze quaduple precedentemente elencate. Le uscite dei circuiti CD mediante i quali tali coincidenze sono effettuate comandano altrettanti multivibratori MVF (contenenti ciascuno due 1L4) le durate dei cui impulsi sono grossolanamente in progressione aritmetica di ragione $150 \mu s$. Tali impulsi sono differenziati, mescolati, amplificati ed invertiti mediante il circuito MD (fig. 10).

All'uscita di questo circuito si hanno perciò tanti brevi impulsi positivi atti a comandare il « blocking oscillator » $BO2$ quanti sono i MVF che sono stati comandati. L'inizio di ciascuno di tali brevi impulsi positivi e quindi l'istante in cui si accende il tubo oscillografico per effetto dell'impulso di $7 \mu s$ fornito da $BO2$, coincide con il termine dell'impulso del corrispondente MVF. D'altra parte in corrispondenza di ogni (ABC) il fascio catodico del tubo oscillografico viene lentamente spostato nella seconda metà del campo dall'impulso lineare di $1000 \mu s$ fornito dal circuito $SL2$ e originato, tramite il multivibratore MV , dall'impulso pilota. Si ottengono in tal modo nella seconda metà del campo oscillografico i vari puntini luminosi di cui si è già detto nel n. 2.

Gli impulsi dei contatori D ed E , trasformati in brevi impulsi positivi ($\sim 1 \mu s$) dai circuiti CE (analoghi a quello di fig. 7) e ritardati di $0,8 \mu s$ (onde compensare sia il ritardo di $0,5 \mu s$ introdotto artificialmente, sia i piccoli ritardi provenienti dai circuiti precedenti la formazione delle coincidenze triple) sono ad un tempo inviati alle placchette per la deviazione verticale del tubo (attraverso un ritardo addizionale di $0,5 \mu s$ che ha lo scopo di renderli meglio osservabili sul campo dell'oscillografo) e, mescolati, sono fatti coincidere con l'impulso pilota. L'impulso di coincidenza comanda poi il $BO2$ il quale, a sua volta, manterrà acceso il tubo oscillografico per $7 \mu s$ a partire dall'istante in cui ha inizio l'impulso di coincidenza.

In tal modo si ottengono, per ciascuno degli eventi (ABC/D_r) , (ABC/E_r) , $(ABC/(DE)_r)$ le fotografie riportate nelle figg. 2, 3, 4 e 5.

La effettiva registrazione degli eventi è ottenuta fotografando il campo dell'oscillografo su una pellicola mantenuta in moto da un motorino elettrico azionato a sua volta da una piccola batteria di 6 V. La velocità (uniforme) di traslazione della regione della pellicola situata in prossimità della fenditura sulla quale è focalizzato il campo oscillografico può essere regolata a piacere.

Lo stesso motorino usato per mantenere in moto la pellicola è usato per far scattare ogni 15 minuti un commutatore in modo da invertire automaticamente, durante il volo, il senso della corrente nell'avvolgimento del magnete. Allo stesso tempo questo commutatore provvede ad interrompere e ad immettere, in corrispondenza delle sue due possibili posizioni, la corrente anodica nell'oscillatore O di fig. 6. Tale oscillatore (un multivibratore analogo ai MVF salvo per la diversa scelta dei *bias* e delle costanti di tempo) fornisce un impulso ogni $3,5$ s circa; impulso che, come si comprende dalla fig. 6, causa l'accensione del tubo oscillografico per la consueta durata di $7 \mu s$. Quando il commutatore è nella posizione per cui la corrente viene immessa nei circuiti anodici dell'oscillatore, ossia nei 15 minuti durante i quali la corrente fluisce nel magnete in un senso determinato, si imprimeranno dunque sulla pellicola una serie di puntini (distanti in misura dipendente ovviamente dalla prescelta velocità di traslazione della pellicola). La presenza o meno di questa serie di puntini permette di identificare inequivocabilmente quale era il senso del campo nel magnete allorché la pellicola è stata impressionata.

Per ottenere le diverse fotografie di eventi riportate a titolo di esempio



Fig. 11. — Fotografia dell'apparato.

nelle figg. 2, 3, 4 e 5, si è usata pellicola da 12 mm Kodak Super XX. Il tubo oscillografico impiegato è un Du Mont 2BP11.

Una fotografia dell'apparato al completo (ad eccezione delle batterie per l'alimentazione) è riprodotta in fig. 11.

Gli autori desiderano ringraziare vivamente il prof. MARCEL SCHEIN per il continuo interesse con cui ha seguito lo sviluppo dell'esperienza e per numerose discussioni.

Essi desiderano esprimere la loro gratitudine anche al prof. SAMUEL K. ALLISON per aver fornito la maggior parte dei mezzi con cui l'apparato è stato realizzato.

Nel periodo dei voli in B-29 gli autori hanno avuto modo di apprezzare particolarmente la cortesia del sig. CHARLES L. D'OOGY, del maggiore WAYNE A. GUSTAFSON che ha pilotato l'aereo e degli uomini dell'equipaggio.

L'apparato per la registrazione fotografica degli eventi è stato realizzato dal sig. IVAR KALBERG cui gli autori desiderano anche esprimere vivi ringraziamenti.

SUMMARY

The description is given of an apparatus built at the University of Chicago, in the years 1947-48 and 1948-49, in order to investigate the process of meson production in the stratosphere. It is shown that at high altitude the apparatus allows one to recognize whether the locally produced mesons are π or μ -mesons and whether they are produced by ionizing or not ionizing rays. Other results which may possibly be obtained by flying the instrument in balloon are briefly discussed.

Uno stabilizzatore elettronico di tensione alternata.

G. TAGLIAFERRI e L. TERRA

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 19 Giugno 1950)

Riassunto. — Viene descritto uno stabilizzatore elettronico della tensione alternata di rete, adatto per erogare sino ad 1 kW di potenza. Sotto il carico massimo, la tensione efficace di uscita risulta stabilizzata entro $\pm 0,6\%$ per variazioni della tensione di ingresso dell'ordine di $\pm 5\%$, con una costante di tempo di stabilizzazione inferiore a 0,2 secondi.

1. — Introduzione.

Le variazioni della tensione alternata di alimentazione perturbano, talvolta in misura notevole, il funzionamento degli apparecchi elettrici ed elettronici. È quindi sempre utile, ed in certi casi indispensabile, alimentare gli apparecchi più sensibili a tali variazioni interponendo opportuni stabilizzatori tra essi e la rete di distribuzione a corrente alternata.

Esistono notoriamente vari tipi di apparecchi destinati a questo uso, ognuno dei quali ha caratteristiche particolari, che ne delimitano il campo d'impiego. Così, ad esempio, i trasformatori regolatori a variazione di reattanza e a variazione di rapporto sono particolarmente adatti per grandi potenze; hanno rendimento elevato, ma anche elevata costante di tempo, basso coefficiente di stabilizzazione e, specie i secondi, introducono durante la regolazione fastidiose variazioni di tensione a carattere transitorio; i trasformatori a ferro saturo, adatti per piccole e medie potenze, hanno un campo di regolazione esteso, ma fortemente dipendente dalla frequenza, e inoltre forniscono tensioni di uscita in genere assai distorte; i regolatori a variazione di resistenza (es. tubi a ferro idrogeno) sono sicuri, economici, ma adatti per piccole potenze, per funzionamento a corrente costante ed hanno in genere lunga costante di tempo; i regolatori elettronici sono piuttosto costosi e delicati, specie nei riguardi di eventuali sovraccarichi anche istantanei, ma sono indipendenti entro larghi limiti dalla frequenza, hanno piccola costante di tempo, piccola distorsione della tensione di uscita, elevato coefficiente di stabilizzazione, e un buon adattamento alle variazioni di carico.

A nostro avviso quest'ultimo tipo risponde meglio degli altri alle esigenze di un laboratorio di ricerca; qui di seguito descriveremo uno stabilizzatore elettronico realizzato in questo Istituto. Stabilizzatori elettronici sono già stati descritti da vari autori ⁽¹⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾, e vengono anche prodotti industrialmente in alcuni paesi: quello da noi descritto, pur non discostandosi nel principio da tipi già noti, presenta delle semplificazioni che lo rendono di realizzazione abbastanza facile ed economica, ed ha il vantaggio di utilizzare solo l'ordinario materiale radioelettrico attualmente disponibile sul nostro mercato.

2. - Principio di funzionamento dello stabilizzatore.

Consideriamo il circuito di fig. 1 e supponiamo che i due trasformatori L_1 e L_2 siano privi di perdite; abbiano impedenza primaria infinita a vuoto, e nulla in corto circuito; e che il ferro in essi usato abbia caratteristica di magnetizzazione lineare: in altri termini supponiamo di usare due trasformatori ideali. I loro rapporti di trasformazione (tensione secondaria diviso tensione primaria) siano K_1 e K_2 rispettivamente. Sia V_i il valore efficace della tensione alternata sinusoidale di ingresso; V_u di quella di uscita; R_u una resistenza pura di carico, e R una resistenza pura regolabile; siano V_1 , V_2 e I_1 , I_2 i valori efficaci delle tensioni e correnti primarie in L_1 , L_2 .

Se il secondario di L_1 è collegato in modo che le tensioni istantanee V_i e $K_1 V_1$ siano in fase, si avrà ovviamente

$$V_u = V_i + K_1 V_1,$$

da cui, tenendo conto che

$$V_1 = V_i - V_2 = V_i - I_2 R / K_2^2; \quad I_2 = I_1 = K_1 V_u / R_u,$$

si ricava:

$$V_u / V_i = (1 + K_1) / [1 + (K_1 / K_2)^2 (R / R_u)].$$

Poichè K_1 , K_2 , R_u hanno valori costanti prestabiliti, appare che il rapporto V_u / V_i può considerarsi funzione di R . Ne segue, che può raggiungersi il risultato di stabilizzare la tensione di uscita V_u al variare della tensione d'ingresso V_i , «compensando» le variazioni di V_i con opportune variazioni di R .

In pratica, noi abbiamo realizzato, sullo schema di principio di fig. 1, un circuito stabilizzatore in cui l'entità del carico sul secondario del trasformatore L_2 viene modificata dalle variazioni della tensione efficace di uscita: questo dispositivo traduce con buona approssimazione una dipendenza di R da V_u , tale da rendere, per un conveniente campo di variazione di V_i , $\Delta V_u / \Delta V_i \ll 1$.

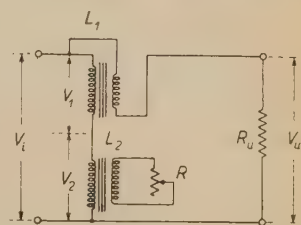


Fig. 1. - Schema di principio dello stabilizzatore.

⁽¹⁾ L. B. CHERRY e R. F. WILD: *Proc. I.R.E.*, **33**, 262 (1945).

⁽²⁾ L. DALE HARRIS: *Electronics*, n. **1**, pag. 150 (1946).

⁽³⁾ L. HELTERLINE: *Electronics*, n. **6**, pag. 96 (1947).

3. - Schema elettrico dello stabilizzatore.

Così come negli usuali stabilizzatori di tensione continua, anche nel nostro circuito si desidera confrontare una frazione della tensione di uscita con una tensione costante di riferimento V_0 , ottenuta per mezzo di un tubo al neon. Si rende quindi necessario disegnare un elemento di circuito per mezzo del quale si ottenga dalla tensione alternata V_u una tensione continua proporzionale al valore efficace della V_u stessa.

Ora è noto che i valori medio, efficace e massimo di una tensione alternata stanno tra loro in rapporti dipendenti dalla forma della tensione stessa: perciò, soltanto se la tensione di uscita dello stabilizzatore fosse sempre rigorosamente alternata sinusoidale, o almeno di forma invariabile, il confronto tra V_u e V_0 potrebbe farsi utilizzando una tensione continua proporzionale indifferentemente al valore medio o efficace o massimo della tensione V_u . D'altra parte, a meno di disporre di diodi speciali come quello utilizzato, ad esempio, da HELTERLINE⁽³⁾, o altrimenti non volendo aumentare eccessivamente la costante di tempo del circuito di confronto, è abbastanza difficile ottenere tensioni continue proporzionali al valore efficace di una tensione alternata.

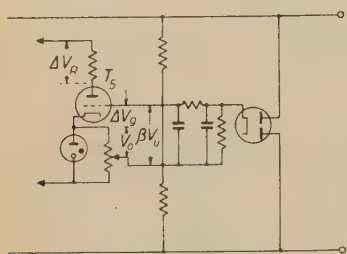


Fig. 2. - Schema semplificato del circuito di confronto.

Noi abbiamo impiegato un circuito raddrizzatore a diodo, con resistenza di carico di valore paragonabile a quello della resistenza interna del raddrizzatore (fig. 2). Abbiamo constatato che in queste condizioni si ottiene una tensione continua βV_u , con $\beta < 1$, che rimane sufficientemente proporzionale al valore efficace V_u , della tensione alternata di uscita, anche se quest'ultima è deformata da impulsi di disturbo comunque distribuiti nell'intero periodo, purchè siano di durata complessiva piccola rispetto al periodo stesso.

Dalla stessa fig. 2 si vede che la differenza $\beta V_u - V_0 = -\Delta V_g$ è immessa in un semplice amplificatore in continua. La d.d.p. amplificata che si ricava ai capi della resistenza di placca del tubo T_5 costituisce infine — a meno di una tensione additiva costante, dovuta alla stabilizzatrice al neon T_4 — la tensione di comando delle coppie di tubi regolatori T_1, T_2 ⁽⁴⁾ (cfr. fig. 3). Va osservato che la tensione sulle placche dei tubi T_1, T_2 è alternata, essendo fornita dal secondario del trasformatore L_2 : ogni coppia di tubi in parallelo condurrà quindi solo per una frazione di semiperiodo. Comunque nel loro insieme i quattro tubi rappresentano un carico variabile sul secondario di L_2 , di valore medio dipendente dalla tensione di comando V_g dei tubi stessi.

Si riconosce facilmente che la dipendenza della suddetta tensione di comando dalla tensione efficace V_u è tale che ad esempio ad una variazione in aumento di V_u corrisponde una diminuzione del carico sul secondario di L_2 :

(4) Abbiamo preferito usare una coppia di tubi 807 collegati come triodi in parallelo, anzichè un solo tubo di potenza doppia, sia per le favorevoli caratteristiche delle 807, sia per ragioni di economia.

ossia una variazione che tende, per il meccanismo descritto al n. 2, a far diminuire il valore di V_u .

4. - Circuito reale e risultati sperimentali.

In quanto precede abbiamo naturalmente trascurato parecchi fattori che, sebbene non modifichino il principio secondo cui funziona lo stabilizzatore, ne alterano in parte il comportamento. È innanzitutto evidente che le resi-

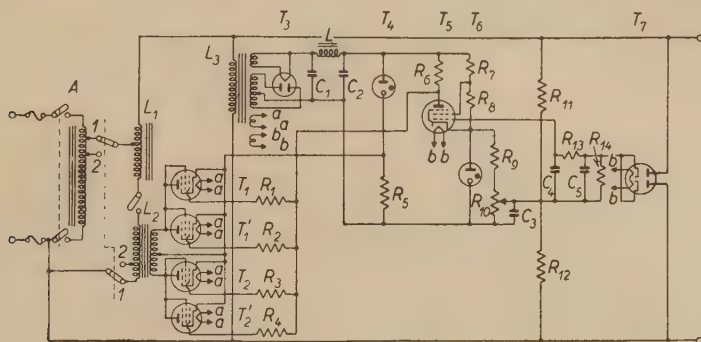


Fig. 3. - Schema completo dei collegamenti elettrici dello stabilizzatore.

A: Autotrasformatore d'ingresso 160/150/145 V

L_1 : autotrasformatore di regolazione ($K_1 = 0,3$)

L_2 : trasformatore di regolazione ($K_2 = 3,5$ a 1 kW; = 4 a 0,5 kW).

L_3 : trasformatore di alimentazione

L: impedenza b.f. 10 H 50 mA

$T_1 = T_1' = T_2 = T_2'$: 807

T_3 : 5 Y 3

$T_4 = T_6$: VR 150/30;

T_5 : 6 V 6

T_7 : 6 H 6

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$: 1 k Ω 1/2 W

R_5 : 30 k Ω 8 W

R_6 : 10 k Ω 10 W

$R_7 = R_8$: 20 k Ω 4 W

$R_9 = R_{13}$: 100 k Ω 1/2 W

R_{10} : 100 k Ω variabile

$R_{11} = R_{12}$: 3 k Ω 3 W

R_{14} : 25 k Ω 1 W

$C_1 = C_2$: 8 μ F

C_3 : 0,05 μ F

$C_4 = C_5$: 2 μ F

Commutatore in posizione 1: 1 kW

Commutatore in posizione 2: 0,5 kW

stenze di avvolgimento e le reattanze di dispersione dei trasformatori usati provocheranno, come effetto principale, un aumento dell'impedenza interna dello stabilizzatore, e quindi un aumento delle cadute di tensione da vuoto a carico: per questo è opportuno che i trasformatori da impiegare siano dimensionati con larghezza nel ferro e nel rame.

L'inevitabile corrente a vuoto dei trasformatori stessi, insieme al fatto che la caratteristica di magnetizzazione del ferro non è lineare, hanno l'effetto di limitare il campo utile di regolazione, e di provocare fenomeni di distorsione non lineare nella tensione di uscita.

Un'ulteriore causa di distorsione deriva dalla non linearità delle caratte-

ristiche delle valvole usate, come pure dal fatto che nei tubi regolatori la corrente di placca circola solo per parte del semiperiodo.

Pur con questi scostamenti dal caso ideale, il funzionamento dello stabilizzatore è risultato abbastanza conforme alle previsioni sommariamente desunte, per ricavare i dati di progetto, dalla schematizzazione usata nei nn. precedenti. Le curve di stabilizzazione (sperimentali) sono riportate nella fig. 4,

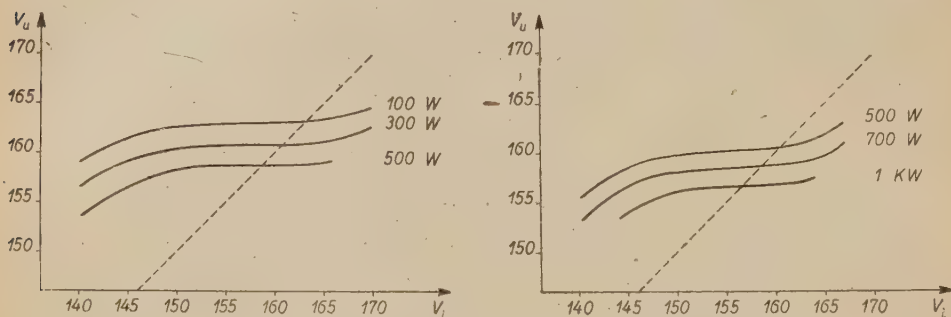


Fig. 4. - Curve di stabilizzazione, per diverse potenze erogate.

dove le linee tratteggiate rappresentano, a scopo di confronto, le variazioni della tensione di rete.

In conclusione, lo stabilizzatore da noi costruito secondo il circuito riportato in fig. 3 è impiegabile in due diverse gamme di potenza di uscita (la scelta si effettua a mezzo di un commutatore):

1) 100-500 W, con tensione di uscita stabilizzata entro ± 1 V, per variazioni di rete tra circa 146 e circa 166 V. Il coefficiente di stabilizzazione medio $\Delta V_i / \Delta V_u$, a carico resistivo costante, è dell'ordine di $10 \div 12$, l'impedenza interna media è dell'ordine di $1,5 \div 2 \Omega$.

2) 400-1 000 W, con tensione stabilizzata entro ± 1 V, per variazioni di rete tra circa 149 e circa 163 V. Il coefficiente medio di stabilizzazione, a carico resistivo costante, è dell'ordine di $7 \div 8$. L'impedenza interna media è ancora dell'ordine di $1,5 \div 2 \Omega$.

In entrambi i casi, la distorsione della tensione di uscita è inferiore al 10%, e la costante di tempo di stabilizzazione è inferiore a 0,2 secondi. L'estensione del campo di stabilizzazione è dissimmetrica rispetto al valore nominale della tensione di rete (160 V), essendosi dimostrate più ampie le variazioni di rete in diminuzione.

SUMMARY

An electronic a.c. voltage regulator is described, which is capable of supplying up to 1 kW power. At the maximum load, the output voltage (r.m.s.) is regulated within $\pm 0,6\%$ for line voltage fluctuations of about $\pm 5\%$. Distorsion of the output voltage does not exceed 10%, and the regulation time constant is less than 0,2 seconds.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Radiazione cosmica a grandi profondità.

C. M. GARELLI e G. WATAGHIN

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 3 Luglio 1950)

Parecchi autori ⁽¹⁾, ⁽²⁾ hanno recentemente studiato la legge di variazione dell'intensità della radiazione cosmica sotto terra.

In questo lavoro si è calcolato l'assorbimento dei mesoni π e μ sottoterra, tenendo conto, non solo della perdita di energia per ionizzazione, decay, Bremsstrahlung e formazione di coppie di elettroni, ma anche della perdita di energia dovuta al processo di creazione di mesoni π per interazione elettromagnetica dei mesoni carichi nell'urto « diretto » coi nuclei. In quanto all'assorbimento nucleare dei mesoni π energetici, sono state esaminate due ipotesi: a) che l'assorbimento nucleare dei mesoni π di elevata energia sia trascurabile, e quindi tanto i mesoni π che i mesoni μ possano penetrare a grandi profondità; b) che i mesoni π interagiscano fortemente coi nuclei e quindi non possano penetrare a grandi profondità.

Alcuni autori ⁽³⁾, ⁽⁴⁾ hanno calcolato

recentemente la sezione d'urto per la produzione di mesoni π per urto diretto di particelle cariche con i nuclei. In particolare dalle formule di Sneddon e Touschek si ricava la perdita d'energia sofferta dalla particella carica incidente in questa interazione con i nuclei:

$$(1) \quad -\frac{dE}{dx} \cong 3,9 \cdot 10^{-7} E \left(\frac{7}{12} \ln \frac{2E}{m_0 c^2} - \frac{1}{3} \right),$$

dove x è la profondità in g/cm². Questo processo comincia a diventare importante sotto terra per energie dei mesoni maggiori di 10¹¹ eV. Per questi valori dell'energia si può scrivere

$$(2) \quad -\frac{dE}{dx} \cong 3 \cdot 10^{-6} E \quad \text{eV/g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Ammettiamo che la componente penetrante a profondità > 100 m di H₂O equivalenti consista essenzialmente di mesoni π e μ carichi di grande energia e della radiazione derivata da questi. La perdita complessiva di energia sofferta dai mesoni π e μ sotto terra risulta:

$$(3) \quad \left(-\frac{dE}{dx} \right)_{\text{tot}} = 2,5 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^{-6} E \quad \text{eV/g} \cdot \text{cm}^{-2},$$

e quindi perchè un mesone possa pene-

(1) K. I. GREISEN: *Phys. Rev.*, **73**, 521 (1948); **76**, 1718 (1949).

(2) S. HAYAKAWA e S. TOMONAGA: *Progr. Theor. Phys.*, **4**, 287 (1949); *Phys. Rev.*, **75**, 1958 (1949).

(3) I. N. SNEDDON e B. F. TOUSCHEK: *Proc. Roy. Soc. (A)*, **199**, 352 (1949).

(4) E. STRICK e D. TER HAAR: *Phys. Rev.*, **78**, 68 (1950).

trare fino alla profondità x sotto-terra, deve avere al livello del mare una energia maggiore di

$$(4) E_m = 4,5 \cdot 10^{11} (\exp [5,6 \cdot 10^{-6} x] - 1).$$

Se si conosce lo spettro integrale $F(E)$ dei mesoni al livello del mare, la (4) permette di ottenere immediatamente la legge di variazione dell'intensità della radiazione cosmica:

$$(5) I(x) = F[E_m(x)].$$

con la profondità.

Risultati essenzialmente diversi si ottengono a questo punto a seconda che si ammetta l'ipotesi *a*) o *b*). Se è valida l'assunzione *a*) la funzione $F(E)$ che interviene nella (5) è la somma dei due spettri $F_\pi(E) + F_\mu(E)$ relativi ai due tipi di mesoni π e μ , da noi calcolata in altri lavori ⁽⁵⁾, mentre nel caso di una interazione nucleare molto energica dei mesoni π interviene solo lo spettro $F_\mu(E)$ dei mesoni μ al livello del mare. Esso è stato calcolato da TOMONAGA e HAYAKAWA ⁽²⁾.

Nella ipotesi *a*) si ottiene la curva I di fig. 1, che è in buon accordo con i dati sperimentali (i punti sperimentali sono indicati con \bullet e \circ). Nell'ipotesi *b*) di una forte interazione nucleare dei mesoni π si ricava invece la curva II, la quale si discosta notevolmente dai punti sperimentali a grandi profondità (misure di WILSON ⁽⁶⁾) e NISHINA e MIYAZAKI ⁽⁷⁾, ⁽⁸⁾).

Questo risultato, qualora venisse confermato da ulteriori ricerche, può considerarsi come un argomento a favore del-

l'ipotesi che la sezione d'urto dei mesoni π molto energici diminuisca rapidamente al crescere dell'energia. Questo

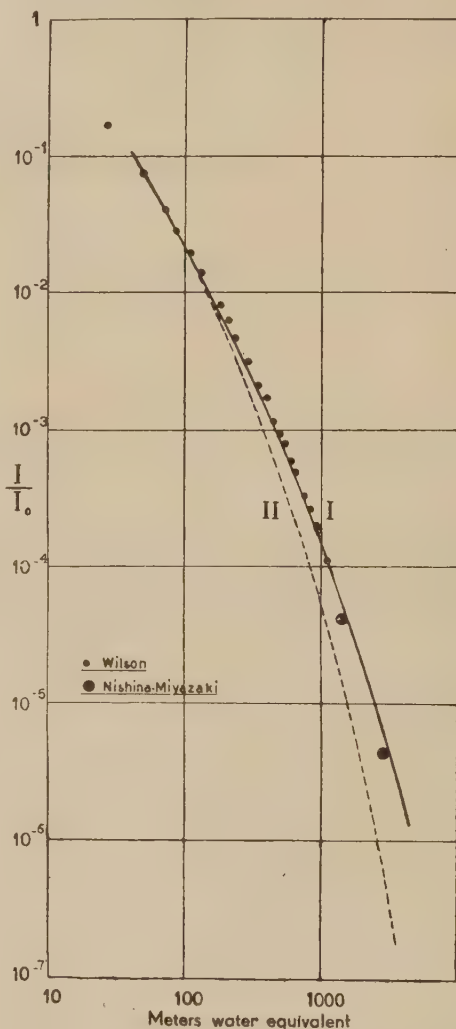


Fig. 1. - Le curve I e II rappresentano i valori teorici dell'intensità relativa della radiazione cosmica in funzione della profondità. I punti \bullet e \circ indicano i valori sperimentali.

⁽⁵⁾ C. M. GARELLI: *Nuovo Cimento*, **6**, 337 (1949); *Relazione al Congresso di Como*, Settembre 1949.

⁽⁶⁾ W. C. WILSON: *Phys. Rev.*, **53**, 337 (1938).

⁽⁷⁾ Y. NISHINA, Y. SEKIDO, Y. MIYAZAKI e T. MASUDA: *Phys. Rev.*, **59**, 401 (1941).

⁽⁸⁾ Y. MIYAZAKI: *Phys. Rev.*, **76**, 1733 (1949).

fatto implica anche una diminuzione della probabilità di tutti i processi di assorbimento dei mesoni π .

Sull'effetto di transizione nel fenomeno di produzione di stelle da parte della radiazione cosmica.

E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI (*) e S. SCIUTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 3 Luglio 1950)

In una recente nota BERNARDINI, CORTINI e MANFREDINI ⁽¹⁾, studiando mediante la tecnica delle emulsioni nucleari l'assorbimento della componente della radiazione cosmica generatrice di stelle in materiali pesanti, mettevano in rilievo l'esistenza di un debole effetto di transizione. GEORGE e JASON ⁽²⁾ invece, impiegando la stessa tecnica, trovavano per la suddetta componente una legge di assorbimento esponenziale del solito tipo.

La questione può, ovviamente, essere chiarita soltanto quando i dati raccolti siano così numerosi da escludere la possibilità che l'effetto di transizione, di per sé piccolo, sia mascherato dagli errori statistici.

A questo scopo abbiamo effettuato delle misure di assorbimento, al Laboratorio della Testa Grigia, impiegando una tecnica che permette di registrare un elevato numero di eventi. Ci siamo serviti infatti di quattro camere di ionizzazione cilindriche analoghe a quelle impiegate

da ROSSI e coll. ⁽³⁾ (lunghezza utile 92 cm, diametro 8 cm, spessore pareti 1 mm di ottone) riempite di Argon purificato a 4,65 atmosfere, connesse, attraverso 4 amplificatori proporzionali, a 4 tubi oscillografici forniti di dispositivo per l'osservazione autosincrona degli impulsi. Una registrazione fotografica entrava in funzione tutte le volte che in

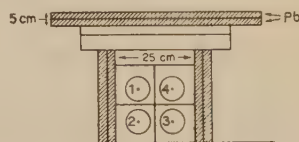


Fig. 1.

almeno una delle camere vi era un impulso superiore a $1,2 V_a$ (ove V_a è l'impulso fornito da un debole preparato di Po inserito in ogni camera, $E_{\alpha_{Po}} = 5,3$ MeV).

Le camere e gli assorbitori eran disposti come risulta dalla fig. 1.

Abbiamo considerato come stelle solo gli eventi singoli, cioè quelli che interessano una sola camera. Le frequenze delle stelle da noi considerate sono quindi valutate per difetto in quanto si sono volutamente trascurati gli eventi in coin-

(*) Assistente dell'Istituto di Fisica della Università di Pavia, momentaneamente presso il centro di Fisica Nucleare con una borsa di studio del C.N.R.

⁽¹⁾ G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **5**, 511 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 845 e 1878 (1948).

⁽²⁾ E. P. GEORGE e A. C. JASON: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 243 (1949).

⁽³⁾ H. S. BRIDGE, W. E. HAZEN, B. ROSSI e R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1083 (1948).

TABELLA I.

	Aria	Pb 2,5 cm	Pb 5 cm
Singole . . .	$4,59 \pm 0,10 \text{ min}^{-1}$	$5,13 \pm 0,11 \text{ min}^{-1}$	$4,60 \pm 0,15 \text{ min}^{-1}$
Doppie . . .	$2,42 \pm 0,24 \text{ h}^{-1}$	$4,83 \pm 0,38 \text{ h}^{-1}$	$3,36 \pm 0,34 \text{ h}^{-1}$
Triple . . .	$0,29 \pm 0,08 \text{ h}^{-1}$	$2,20 \pm 0,26 \text{ h}^{-1}$	$1,02 \pm 0,18 \text{ h}^{-1}$
Quadruple .	$0,85 \pm 0,14 \text{ h}^{-1}$	$13,50 \pm 0,60 \text{ h}^{-1}$	$10,60 \pm 0,59 \text{ h}^{-1}$

TABELLA II.

	Aria	Pb 2,5 cm	Pb 5 cm
$\geq 1,2\alpha$	$4,59 \pm 0,10$	$5,13 \pm 0,11$	$4,60 \pm 0,15$
$\geq 1,3\alpha$	$3,82 \pm 0,07$	$3,79 \pm 0,065$	$3,62 \pm 0,067$
$\geq 1,4\alpha$	$3,06 \pm 0,06$	$3,01 \pm 0,06$	$2,93 \pm 0,06$
$\geq 1,5\alpha$	$2,28 \pm 0,55$	$2,20 \pm 0,04$	$2,10 \pm 0,05$
$\geq 1,7\alpha$	$0,94 \pm 0,025$	$0,94 \pm 0,024$	$0,87 \pm 0,026$
$\geq 2,0\alpha$	$0,59 \pm 0,012$	$0,55 \pm 0,016$	$0,51 \pm 0,017$
$\geq 2,5\alpha$	$0,336 \pm 0,009$	$0,310 \pm 0,012$	$0,270 \pm 0,012$
$\geq 3,0\alpha$	$0,175 \pm 0,007$	$0,150 \pm 0,009$	$0,120 \pm 0,008$

cidenza tra due o più camere. Mentre per le doppie e le triple essi possono attribuirsi a stelle, le quadruple sono per la massima parte dovute a sciami ⁽⁴⁾. Dall'esame della tab. I, qui riportata, si vede che l'errore commesso nel trascurare gli eventi in coincidenza è però molto piccolo.

Durante lo svolgimento della presente esperienza CORTINI e MANFREDINI ⁽⁵⁾ hanno ulteriormente precisato il loro risultato trovando un effetto di transizione nel piombo con un massimo del 14% a circa 20 g/cm² e per stelle piccole (3-4 rami); per stelle con maggior numero di rami gli autori hanno invece trovato un normale assorbimento espo-

nenziale. A conferma dei loro risultati i predetti autori citarono i risultati preliminari della nostra ricerca che già fornivano una indicazione di tale effetto. Più recentemente MALASPINA, MERLIN, PIERUCCI e ROSTAGNI ⁽⁶⁾ con la tecnica delle lastre hanno osservato, sia pure con statistica scarsa, un analogo effetto.

Nella tab. II si riportano i risultati delle nostre misure eseguite con e senza assorbitore (gli spessori impiegati erano di 2,5 e 5 cm Pb), alternando ogni due ore le tre situazioni. La fig. 2 rappresenta lo spettro differenziale ottenuto ponendo nel punto di ascissa $1,3 V/V_\alpha$ la frequenza corrispondente agli eventi di ampiezza compresa tra 1,2 e $1,4 V/V_\alpha$, e così via sempre considerando intervalli di $0,2 V/V_\alpha$.

⁽⁴⁾ E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 401 (1950).

⁽⁵⁾ G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nature*, **165**, 992 (1949).

⁽⁶⁾ L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950).

Si può così confermare qualitativamente l'esistenza dell'effetto di transizione per stelle piccole.

tra lo spettro di impulsi osservato nelle camere di ionizzazione e lo spettro delle stelle in funzione del numero dei rami

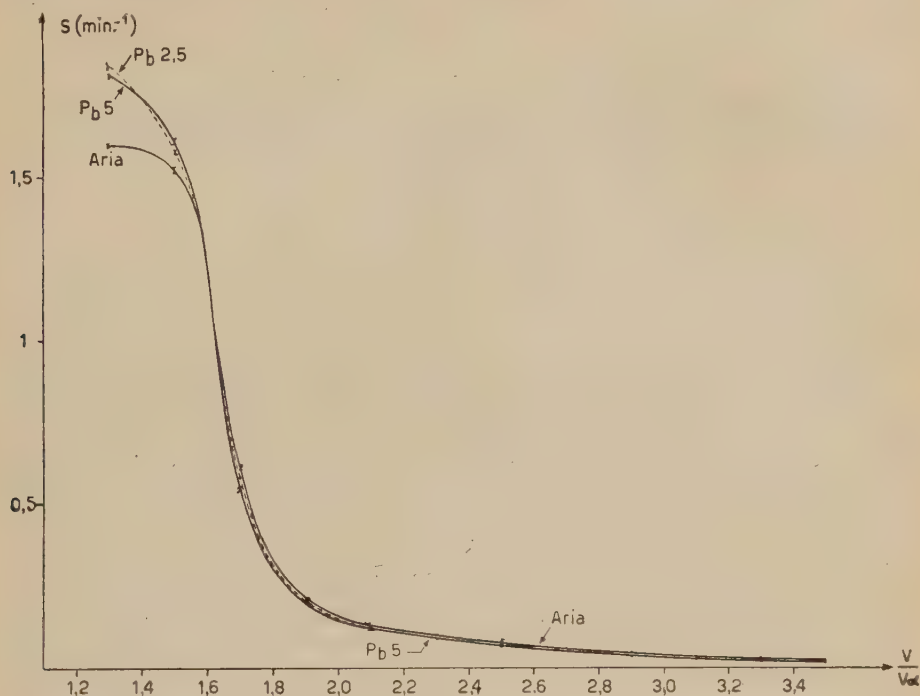


Fig. 2.

Rimandiamo ad un lavoro più esteso la discussione sulla relazione esistente

quale si osserva con la tecnica delle emulsioni nucleari.

(Nota aggiunta alle bozze). — Riteniamo opportuno dare a parte gli errori statistici sui singoli punti, non riportati sul grafico per ragioni di chiarezza. Per le tre curve, si hanno nei punti di ascissa 1,3; 1,5; 1,7 V/V_0 ecc., rispettivamente gli errori $\pm 0,07$; 0,04; 0,02; 0,01; 0,008; 0,005; 0,004; 0,004; 0,003.

Sulle funzioni di struttura angolare e laterale degli sciami estesi.

A. BORSELLINO

Istituto di Fisica del Politecnico - Milano

(ricevuto il 4 Luglio 1950)

Attualmente le uniche calcolazioni dettagliate delle funzioni di struttura degli sciami estesi sono dovute a MOLIÈRE ⁽¹⁾. MOLIÈRE si limita a considerare la distribuzione angolare e laterale degli elettroni al massimo dello sciame e dà soltanto un breve riassunto del procedimento di calcolo. Recentemente ⁽²⁾ MOLIÈRE ha presentato inoltre i suoi risultati per la distribuzione dei fotoni, sempre al massimo dello sciame.

Da entrambe queste esposizioni non è facile giudicare il grado di approssimazione dei risultati di MOLIÈRE, poichè sono necessarie lunghe calcolazioni numeriche ancora non pubblicate. MOLIÈRE parte valutando inizialmente per via numerica le trasformate di Fourier delle distribuzioni angolare e laterale degli elettroni di una data energia. Nel massimo dello sciame sono lecite alcune semplificazioni nelle equazioni di diffusione di Landau e ci si può ridurre, trascurando la perdita di energia per ionizzazione, ad equazioni puramente integrali (ed omogenee) nelle trasformate. MOLIÈRE integra numericamente queste equazioni e rappresenta poi con opportune espressioni analitiche, approssimate entro qualche per cento, i risultati numerici ottenuti. Le distribuzioni angolare e laterale sono ottenute poi eseguendo l'inversione della trasformazione di Fourier sulle espressioni così ottenute. MOLIÈRE passa poi da queste distribuzioni differenziali a quelle integrali, tenendo infine conto del contributo degli elettroni di bassa energia col metodo di Arley.

Mi propongo di indicare brevemente come, generalizzando un procedimento di recente seguito ⁽³⁾ per il calcolo della dispersione quadratica media degli elettroni e dei fotoni, si possano ottenere le trasformate di Fourier delle funzioni di distribuzione a qualunque profondità, senza dovere ricorrere a penose integrazioni numeriche.

Sia, per esempio, $F(E, t, \theta_x)$ la funzione di distribuzione angolare degli elettroni, cosicchè $F(E, t, \theta_x) dE d\theta_x$ rappresenti il numero di elettroni di energia tra E ed $E + dE$, alla profondità t , con deviazione angolare (angolo proiettato) tra θ_x e $\theta_x + d\theta_x$. Normalizzando ad 1 la funzione di distribuzione, abbiamo la funzione di struttura angolare $\Phi(E, t, \theta_x) = F(E, t, \theta_x)/\pi(E, t)$ essendo $\pi(E, t) dE$ il numero totale degli elettroni di energia in dE alla profondità t . La trasformata di Fourier $\varphi(E, t, \zeta_x)$

⁽¹⁾ G. MOLIÈRE: *Cosmic Radiation* (ed. by W. Heisenberg, New York, 1946), Cap. 3°.

⁽²⁾ G. MOLIÈRE: *Phys. Rev.*, **77**, 715 (1950).

⁽³⁾ A. BORSELLINO: questo stesso fasc., pag. 638.

della funzione di struttura non è altro che la funzione caratteristica della distribuzione e questa è univocamente determinata dalla conoscenza dei momenti della distribuzione stessa ⁽⁴⁾:

$$(1) \quad \varphi(E, t, \zeta_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(E, t, \theta_x) \exp [-i\zeta_x \theta_x] d\theta_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\zeta_x)^n \langle \theta_x^n \rangle_{E, t}$$

dove $\langle \theta_x^n \rangle_{E, t}$ sono appunto i momenti di ordine n della distribuzione angolare:

$$(2) \quad \langle \theta_x^n \rangle_{E, t} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x^n \Phi(E, t, \theta_x) d\theta_x = \frac{1}{\pi(E, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x^n F(E, t, \theta_x) d\theta_x.$$

Nel lavoro citato ⁽³⁾ sono stati calcolati i momenti quadratici della distribuzione utilizzando le equazioni di diffusione di Landau e le trasformate di Mellin-Laplace-Fourier. Generalizzando il procedimento là seguito si possono calcolare per ricorrenza i momenti di ordine n qualsiasi e precisamente si trova:

$$(3) \quad \langle \theta_x^n \rangle_{E, t} = \frac{n(n-1)}{4} \frac{K^2}{E^2} H(s, n) \langle \theta_x^{n-2} \rangle_{E, t},$$

dove

$$(4) \quad H(s, n) = \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n)][\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n)]},$$

con il significato usuale dei simboli (vedi ⁽²⁾). Si ottiene così per la funzione caratteristica (1) della struttura angolare degli elettroni:

$$(5) \quad \varphi(E, t, \zeta_x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \left(\frac{K\zeta_x}{2E} \right)^{2n},$$

dove si è tenuto conto che $\langle \theta_x \rangle_{E, t} = 0$ e quindi che in (1) sono diversi da zero solo i momenti di ordine pari. I coefficienti della (5) sono calcolabili per ricorrenza facilmente:

$$(6) \quad a_0 = 1, \quad a_n = H(s, 2n) a_{n-1}.$$

Si osservi che il parametro s è quello usuale della teoria degli sciame.

In modo analogo per la funzione caratteristica della struttura angolare dei fotoni si ottiene:

$$(7) \quad \psi(W, t, \zeta_x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \left(\frac{K\zeta_x}{2W} \right)^{2n},$$

con

$$(8) \quad b_n = \frac{C(s+2n)}{C(s)} a_n.$$

Nel massimo dello sciame si deve porre $s = 1$ e si ottiene:

$$a_1 = 0,570, \quad a_2 = 0,239, \quad a_3 = 0,0857, \quad a_4 = 0,0277, \quad \dots$$

⁽⁴⁾ Vedi, per es., H. CRAMER: *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton, 1946).

e si può verificare che la (5) è praticamente coincidente in questo caso con quella valutata da MOLIÈRE.

Espressioni analoghe si ottengono per le funzioni caratteristiche della struttura laterale.

Si osservi che gli sviluppi (5) ed (8) sono assolutamente convergenti in tutto il piano della ζ_x . Per valori grandi della variabile i valori numerici possono essere ottenuti abbastanza rapidamente con un algoritmo del tipo prodotto infinito. Si può verificare poi direttamente che detti sviluppi sono soluzioni di equazioni integrali, dalle quali si può ricavare l'andamento asintotico della funzione caratteristica che determina essenzialmente la forma della funzione di struttura. Si possono infine ottenere dagli sviluppi per la distribuzione differenziale quelli per la distribuzione integrale sempre ad una profondità generica. Si verifica inoltre che la struttura mediata su tutte le profondità coincide con la struttura di MOLIÈRE al massimo.

I calcoli in dettaglio e la discussione dei risultati saranno pubblicati in un prossimo lavoro.

Sui modelli statistici dei nuclei.

G. PUPPI

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

(ricevuto il 2 Luglio 1950)

È noto come ⁽¹⁾ si possa tentare di dare una descrizione della stabilità del nucleo standard pesante, in base ad un modello statistico del nucleo stesso, partendo da una approssimazione zero in cui le particelle costituenti, supposte indipendenti, si descrivono con onde piane. Si introduce indi, come perturbazione, l'interazione tra coppie di particelle, e il valore di tale energia di perturbazione, mediato sulle autofunzioni imperturbate costituisce, in prima approssimazione, l'energia potenziale del sistema. Questo valore, d'altra parte, risulta superare di poco il valore della energia cinetica che compete al sistema di onde materiali nel nucleo, fornendo così un valore troppo modesto per la energia di legame.

EULER ⁽²⁾ ha però fatto vedere che il contributo alla energia potenziale che proviene dal termine di seconda approssimazione può essere sufficiente a migliorare la situazione. Tutto questo ammettendo che le particelle che costituiscono il nucleo possano considerarsi alla stregua di un gas di Fermi allo zero assoluto, cioè un sistema fisico nel quale sono occupati tutti gli strati più profondi, con un numero di occupazione 1 per ogni diverso tipo di particella (2 tipi di neutroni e 2 tipi di protoni). D'altra parte però, come ha fatto vedere WATANABE ⁽³⁾, un così forte contributo della seconda approssimazione è accompagnato da una notevole deformazione, già in prima approssimazione, della autofunzione globale del sistema.

Pertanto, se pure un grosso contributo del termine di seconda approssimazione ($> 1/4$ del contributo del termine di prima approssimazione) migliora la situazione dal punto di vista quantitativo nei riguardi della energia di legame, esso rappresenta in realtà una condizione insoddisfacente per il fondamento della trattazione stessa del problema e tale condizione va corretta. La maniera più semplice sembra essere quella di modificare la condizione iniziale e di partire pertanto da una condizione che risulti meno profondamente perturbata, quando si introduce la interazione tra le particelle, di quanto non sia quella che corrisponde allo zero assoluto.

Il modo con cui si deforma la condizione iniziale dello zero assoluto può fornire una indicazione sul modo di sceglierne una migliore, se pure non può essere assunto come rappresentativo della effettiva condizione iniziale. Poichè questa deve essere dunque postulata, non esiste a priori alcuna obiezione per supporre che essa possa essere descritta da una distribuzione perturbata di Fermi.

⁽¹⁾ L. ROSENFELD: *Nuclear Forces*, Ch. XIII.

⁽²⁾ H. EULER: *Zeits. f. Phys.*, **105**, 553 (1937).

⁽³⁾ S. WATANABE: *Zeits. f. Phys.*, **113** 482, (1939).

Nell'impiego della distribuzione di Fermi relativa ad una temperatura $T \neq 0$ si può fare uso della approssimazione ben nota, consistente in uno sviluppo in serie di potenze di kT , valido per T non troppo elevato. La energia cinetica del sistema assume la forma (valore medio per particella)

$$\int f(p) p^4 dp \sin \vartheta_p d\vartheta_p d\varphi_p / 2M\tau,$$

con

$$\tau = \int f(p) p^2 dp \sin \vartheta_p d\vartheta_p d\varphi_p.$$

Per il calcolo della energia potenziale in prima approssimazione, bisogna formare i valori medi degli elementi di matrice

$$(pq | V | pq)_{\text{ordinario}}, \quad (qp | V | pq)_{\text{scambio tutte}}, \quad (qp | V | pq)_{\text{scambio parziale}},$$

corrispondenti allo scambio di nessuna, di tutte o di parte delle coordinate interne dei due nucleoni, di impulsi rispettivamente p, q . Gli accennati valori medi si ottengono con un procedimento di peso sulla funzione di occupazione $f(p), f(q)$ al modo seguente (nel caso della interazione con scambio)

$$(1) \quad (qp | V | pq)_{\text{tutte}} = \frac{1}{\tau^2} \iiint \iiint (qp | V | pq) f(p) p^2 dp f(q) q^2 dq \sin \vartheta_p d\vartheta_p \sin \vartheta_q d\vartheta_q d\varphi_p d\varphi_q,$$

$$(2) \quad (qp | V | pq)_{\text{parz}} = \frac{1}{\tau^2} \iiint \iiint (qp | V | pq) f(p) [1 - f(p)] \times \\ \times f(q) [1 - f(q)] p^2 dp q^2 dq \sin \vartheta_p d\vartheta_p \sin \vartheta_q d\vartheta_q d\varphi_p d\varphi_q.$$

Per quanto riguarda il contributo del termine di seconda approssimazione, esso si costruisce, in funzione del vettore

$$\mathbf{K} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{q}',$$

che fa passare dallo stato iniziale (pq) allo stato intermedio (p', q') , al modo seguente

$$(3) \quad - \frac{M}{\tau^2} \int_0^\infty 4\pi K dK |V(K)|^2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(p) p dp f(q) q dq \int_{q-K}^{q+K} \int_{p-K}^{p+K} \frac{[1 - f(x)][1 - f(y)]}{x^2 + y^2 - p^2 - q^2} x dx y dy.$$

Si vede facilmente come il risultato immediato di questa trattazione comporti l'intervento di un nuovo termine (2), e conduca nel termine di seconda approssimazione ad una parziale cancellazione tra i contributi delle transizioni virtuali con

$$E_{p'q'} = (p'^2 + q'^2)/2M \quad \text{maggiore o minore di} \quad E_{pq} = (p^2 + q^2)/2M.$$

Un lavoro più esteso apparirà prossimamente in cui il problema accennato verrà discusso dal punto di vista quantitativo, e un nuovo modello nucleare verrà esaminato.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA